

Автономная некоммерческая образовательная организация высшего образования
«НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «СИРИУС»

На правах рукописи



Коновалов Петр Алексеевич

Алгоритмы управления группой мобильных роботов в условиях дефицита
информации о сцене

2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Матвеев Алексей Серафимович

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
ГЛАВА 1. Плотное заметающее покрытие коридора роем неголономных роботов	17
1.1. Постановка задачи	19
1.2. Модель роботов и закон навигации	20
1.2.1. Комментарии к неформальным идеям, лежащим в основе закона управления	23
1.3. Предположения и основные результаты	25
1.4. Тесты компьютерного моделирования	27
1.5. Заключение	32
ГЛАВА 2. Реактивная автономная самоорганизация однородных роев беспилотных наземных транспортных средств для покрытия коридора с препятствиями	34
2.1. Прохождение коридора с препятствиями	36
2.2. Теоретические предположения	38
2.3. Предварительная обработка сенсорных данных	41
2.4. Алгоритм навигации	45
2.5. Основные результаты	47
2.5.1. Подготовка	47
2.5.2. Ключевой теоретический результат	48
2.5.3. Выбывание членов команды	52
2.5.4. Пополнение команды	52
2.5.5. Непрямые коридоры	53
2.5.6. Некоторые подходы к ослаблению Допущения 2.2.3	54
2.6. Тесты компьютерного моделирования	55
2.7. Результаты тестов на реальных физических роботах	61
2.8. Заключение	64

ГЛАВА 3. Распределённые нелинейные алгоритмы построения цепных формаций полностью однородными многоагентными командами с установлением информационной связи	66
3.1. Постановка задачи	68
3.2. Равномерное самораспределение с заданным шагом	70
3.3. Равномерное самораспределение от заданной якорной точки и в пределах заданного интервала	72
3.4. Иллюстративные примеры	74
3.4.1. Построение виртуальной антенной решётки в 3D	75
3.4.2. Распределённый алгоритм круиз контроля	77
3.4.3. Многоагентное сканирование коридорных зон с учетом требований самосохранения	79
3.5. Заключение	82

ГЛАВА 4. Распределённые алгоритмы для самораспределения роботизированных сетей по неизвестным сложным областям в условиях отсутствия GPS	83
4.1. Постановка задачи	84
4.2. Предлагаемые алгоритмы	86
4.2.1. Секторальный алгоритм (<i>SA</i>)	86
4.2.2. Непрерывный секторальный алгоритм (<i>CSA</i>)	87
4.3. Метрики эффективности	92
4.4. Анализ эффективности алгоритмов	94
4.4.1. Алгоритмы покрытия области на основе виртуальных силовых полей (<i>VFB</i>)	94
4.4.2. Постановка эксперимента	97
4.4.3. Симуляционные тесты: сцена в виде бабочки	98
4.4.4. Симуляционные тесты: круглый коридор	100
4.4.5. Симуляционные тесты: сцена с двумя препятствиями	101
4.4.6. Симуляционные тесты: коридор в виде зиг-зага	103
4.4.7. Симуляционные тесты: усреднение по всем сценам	104
4.4.8. Тестирование <i>SA</i> и <i>CSA</i> в сложной сцене	105
4.5. Заключение	106

ГЛАВА 5. Распределённая самоорганизация гомогенного роя роботов в равномерную замкнутую цепь с установлением информационной связности	107
5.1. Постановка задачи и предположения теоретического анализа	109
5.2. Децентрализованный протокол для равномерного саморазмещения	115
5.2.1. Основной теоретический результат	116
5.2.2. Информационная связность не требуется изначально	117
5.2.3. Выход из строя и подключение новых членов команды во время выполнения миссии	119
5.3. Иллюстративные примеры	120
5.3.1. Сканирующее покрытие одномерного барьера, изгибающегося в трёхмерном пространстве	121
5.3.2. Сканирующее покрытие удалённого барьера	124
5.4. Тесты компьютерного моделирования	130
5.5. Заключение	133
Заключение	134
Список сокращений и условных обозначений	136
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	139
Приложение А. Приложение к Главе 1	160
А.1. Доказательства результатов, приведённых в разделе 1.3	160
Приложение Б. Приложение к Главе 2	170
Б.1. Доказательство теоремы 2.5.2 и замечаний 2, 3, 4	170
Приложение В. Приложение к Главе 3	183
В.1. Доказательство теоремы 3.2.1	183
В.2. Доказательства Теорем 3.3.1 и 3.3.2	186
Приложение Г. Приложение к Главе 5	190
Г.1. Доказательство теоремы 5.2.1	190
Г.2. Доказательство леммы 5.3.5	200

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования

Задачи распределённого управления роями мобильных роботов приобретают всё большее значение в связи с расширением областей применения автономных групп устройств: мониторинг протяжённых объектов и территорий, инспекция, экологический контроль, патрулирование и связанные миссии [1—6]. Одновременно развитие микроэлектроники, сенсорных и навигационных средств сделало практически доступным развёртывание крупномасштабных сетей недорогих мобильных роботов для мониторинга и обработки протяжённых объектов и обширных территорий [1—3]. К числу типичных миссий текущего и перспективного практического применения относятся разведка, автоматизированное разминирование и минирование, инспекция, оперативное развёртывание «на лету» беспроводных ячеистых коммуникационных сетей, поисково-спасательные операции, обнаружение источников загрязнения, мониторинг пожаров и зон заражения окружающей среды, задачи распределённого обнаружения и охватывающего сопровождения целей и др. [1, 2, 5, 6]. Эффективность таких миссий в решающей степени зависит от размещения элементов сети: в идеале — в оптимальных позициях, а как минимум так, чтобы любая точка обрабатываемой области или объекта попадала в зону действия хотя бы одного агента.

Для крупномасштабных команд внешнее централизованное развёртывание и управление часто оказывается непрактичным, трудоёмким, опасным или вовсе невыполнимым. Поэтому актуальны и всё более востребованы распределённые алгоритмы автономного саморазвёртывания и управления, сочетающие вычислительную простоту, однородность ролей агентов, работу при дефиците сенсорных и коммуникационных ресурсов и, по возможности, строгие гарантии нелокальной сходимости [3, 7—12]. При этом *саморазвёртывание* означает, что, стартуя из сравнительно случайных начальных положений, агенты автономно прибывают к целесообразной конфигурации и далее её поддерживают [3, 7, 9, 10, 13].

Степень разработанности темы

Рассматриваемый в диссертации класс задач относится к парадигме *роевой робототехники* [4, 14]. При этом под *роем* понимается однородный ансамбль простых и относительно дешёвых мобильных роботов, неотличимых друг от друга (анонимных), не способных выполнять различные роли в составе команды и существенно ограниченных в сенсорных, вычислительных и коммуникационных ресурсах. Ввиду отсутствия ролевой дифференциации управление таким ансамблем сводится к индивидуальной реализации каждым роботом одного и того же правила (протокола) на основе доступных ему локальных сенсорных данных о своей малой окрестности. Требуемым результатом, однако, является скоординированное поведение и кооперация членов роя при решении глобальной задачи, превосходящей возможности отдельного агента. Иными словами, речь идёт о механизме возникновения согласованного поведения ансамбля из локальных взаимодействий многих примитивно, однородно и индивидуально действующих робототехнических агентов — в духе поведенчески-ориентированного искусственного интеллекта [11]. Однородность обеспечивает масштабируемость, гибкость, отказоустойчивость, взаимозаменяемость агентов и снижение стоимости развёртывания и обслуживания. Вместе с тем она исключает ряд распространённых и хорошо разработанных подходов к децентрализованному управлению формациями. К их примерам относятся методы, основанные на отношениях лидер–ведомый, применении виртуальных жёстких структур, априорном назначении меток или индивидуальных задач отдельным агентам, а также на выделении и закреплении каналов связи или взаимодействия между фиксированными парами агентов [8, 12, 15—19]. Однородности более созвучны поведенческие подходы [20]. Однако многие из них не дают строгих гарантий возникновения требуемой формации; позитивные исключения связаны, в частности, с протоколами консенсуса и ассоциированными методами построения формаций и покрытий [3, 15, 21—23].

Значительная часть литературы по управлению мобильными роботами в целях покрытия сосредоточена на геометрическом планировании траекторий для одного или нескольких роботов [24—28] (в том числе с опорой на идеи клеточной декомпозиции рабочей области или её сэмплирования [29—31]), а также на решении задачи статического размещения и диспетчеризации узлов на структурированных и известных сценах [32—40]. Детали управления

движением, кинематические и динамические ограничения, безопасность (отсутствие столкновений) и строгие гарантии нелокальной сходимости в ситуации неизвестной сцены в основном оставались за рамками рассмотрения, либо перекладывались на неспецифицированный нижний уровень управления. Однако при ограниченных вычислительных и энергетических ресурсах узлов такая двухуровневая архитектура (планировщик плюс отдельный контур исполнения) часто нежелательна. Для априори неизвестных сцен широко применяются методы виртуальных сил и потенциальных полей [41—48], а также подходы, опирающиеся на разбиение Вороного [49—52]. Вместе с тем они ориентированы преимущественно на статическое (в том числе барьерное) покрытие [53, 54]; строгие гарантии нелокальной сходимости к требуемому распределению при этом остаются относительной редкостью [3, 55]. Кроме того, многие предложенные решения опираются на постоянный обмен данными между агентами, который на практике может быть недоступен или нежелателен. Ещё реже одновременно учитываются отсутствие нумерации и связи между агентами, ограниченная зона видимости и необходимость восстановления формации после прохождения препятствий или изменения состава команды.

Постоянная информационная связность команды часто просто постулируется при анализе распределённых алгоритмов [15, 56, 57], тогда как в ситуации, когда возможность передачи данных зависит от расстояния между агентами, само исполнение основного закона движения может эту связность разрушать [58]. Один из популярных подходов к решению этой проблемы состоит в запрете любых перемещений, которые приводят к разрыву хотя бы одной из имеющихся связей [59—61]. Однако этот подход может привести к недостижимости целевого распределения. Примером служит ситуация, когда роботы начинают в тесном кластере и тем самым в условиях видимости «всех со всеми», а требуется их рассредоточить по настолько обширной области, что расстояние между крайними и не только роботами превышает дистанцию сенсорного контакта. Имеющиеся альтернативные подходы [62—64] связаны с тщательным отбором допускаемых к разрыву информационных связей, однако характеризуются высокой вычислительной сложностью и требуют доступа к значительному объёму информации о глобальной топологии обмена данными.

Напротив предметом настоящей работы являются основанные на локальных сенсорных данных вычислительно нетребовательные *реактивные* алгоритмы управления. *Реактивным* называется закон (протокол), который в

реальном времени осуществляет прямое, «рефлексоподобное» преобразование текущих сенсорных наблюдений в текущее управляющее воздействие без опоры на заранее вычисленный план траектории, глобальную карту сцены или интенсивный межроботный обмен сообщениями. Такие законы обычно вычислительно дешёвы и удобны для миниатюрных платформ, однако их анализ, особенно доказательство нелокальной сходимости и безопасности порождённых ими манёвров, представляет существенную теоретическую трудность [8].

Вместе с тем именно сочетание однородности роя, сенсорных и коммуникационных ограничений, вычислительной простоты алгоритма и строгих гарантий сходимости и выполнения необходимых требований (например, отсутствия столкновений между роботами) является общим контекстом всех глав диссертации.

Настоящая диссертация направлена на восполнение указанных пробелов для ряда практически значимых сценариев заматающего и статического покрытия, а также равномерного самораспределения на линии и в замкнутой цепи [52—54, 65—69].

Цель и задачи исследования

Целью диссертации является разработка и строгое обоснование распределённых реактивных алгоритмов управления однородными роями мобильных роботов, обеспечивающих саморазвёртывание роя и эффективное покрытие априори неизвестных протяжённых областей в условиях дефицита информации о сцене и локальности сенсорных данных, а также при отсутствии средств связи и доступа к системам позиционирования.

Рассматриваемые сценарии охватывают заматающее (динамическое) и барьерное покрытие коридорообразных сцен [53, 54], равномерное самораспределение на линии и в замкнутой цепи [67—71], а также статическое покрытие сложных двумерных областей при отсутствии доступа к системам позиционирования [52, 65, 66]. Исследуемые модели роботов включают аналоги машины Дубинса, простой интегратор (в том числе для моделирования беспилотных наземных транспортных средств, далее UGV) и общие нелинейные уравнения второго порядка с согласованными неопределённостями. Общие для глав допущения — отсутствие информации о размере команды и сцене, средств связи и нумерации (анонимность), ограниченная зона видимости и

единое правило управления для всех агентов — уточняются в каждой главе применительно к конкретной постановке.

Для достижения указанной цели были поставлены следующие задачи:

1. Разработать реактивный закон управления роем неголономных роботов типа машины Дубинса для формирования подвижного эффективного барьера поперёк неизвестного коридора и обеспечения его движения с заданной скоростью вдоль коридора; доказать нелокальную сходимость алгоритма для коридоров с прямыми параллельными стенами и исследовать его работоспособность в более сложных сценах.
2. Разработать и теоретически обосновать распределённое правило управления роем беспилотных наземных транспортных средств с кинематикой интегратора для плотного заметающего покрытия коридора с неизвестными многоугольными препятствиями и искривлёнными стенами; подтвердить работоспособность алгоритма компьютерным моделированием и экспериментами на физических роботах.
3. Построить и теоретически обосновать вычислительно нетребовательные протоколы равномерного самораспределения полностью однородной команды роботов с целью формирования решётки с заданным шагом, а также равномерного распределения на неизвестном интервале, обеспечивающие возникновение информационной связности команды «из ничего»; проиллюстрировать разработки их применением к задачам круиз-контроля, покрытия коридоров и построения виртуальной антенной решётки.
4. Синтезировать распределённые алгоритмы самораспределения по неизвестным сложным двумерным областям в условиях отсутствия доступа к системам позиционирования (в частности, GPS), разработать метрику, оценивающую степень равномерности покрытия области, и провести сравнительный анализ предложенных алгоритмов с известными методами решения исследуемой задачи.
5. Разработать распределённый протокол самоорганизации однородного роя роботов в равномерную замкнутую цепь (применительно к заданной циклической выходной переменной) в случае роботов с нелинейной динамикой второго порядка с согласованными неопределённостями, обеспечивающий отработку заданного временного профиля скорости и не требующий начальной информационной связности команды;

теоретически обосновать сходимость и проиллюстрировать её в задачах заматающего покрытия барьерной линии в 3D.

Все поставленные задачи были решены.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми. Результаты опубликованы в международных рецензируемых научных журналах.

1. Разработан, включая строгое обоснование, новый распределённый реактивный закон управления роем анонимных (не различающих друг друга), не голономных, неполноприводных роботов типа машины Дубинса, не снабжённых системами связи и обладающих ограниченной зоной видимости, для плотного заматающего покрытия коридора при отсутствии нумерации роботов, знания ими размера команды и ширины коридора. Закон управления обеспечивает отсутствие столкновений роботов друг с другом и стенами коридора. Методом компьютерного моделирования установлена определённая степень робастности к искривлениям стен, препятствиям и изменениям численности команды.
2. Разработан, включая строгое обоснование, новый распределённый реактивный закон управления роем анонимных роботов с кинематикой простого интегратора, не снабжённых системами связи и обладающих ограниченной зоной видимости, для плотного заматающего покрытия неизвестного коридора с искривлёнными стенами после прохождения полосы статических многоугольных препятствий, при отсутствии нумерации роботов, знания ими размера команды, а также параметров сцены. Закон управления обеспечивает отсутствие столкновений роботов друг с другом, препятствиями и стенами коридора. Методом компьютерного моделирования продемонстрирована применимость алгоритма при наличии динамических препятствий и разрывов информационной связности; теоретические выводы и робастность к реальным неидеальностям продемонстрированы экспериментами на физических моделях.
3. Разработаны, включая строгое обоснование, новые распределённые нелинейные протоколы равномерного самораспределения однородной команды неизвестного размера, состоящей из анонимных агентов

с ограниченной зоной видимости, учитывающие ограничения на управление, для формирования одномерной решётки с заданным шагом, а также равномерного распределения на неизвестном одномерном интервале; доказана способность алгоритма к формированию информационной связности при её первоначальном отсутствии и на основе локальных данных.

4. Предложены два новых распределённых алгоритма самораспределения роя анонимных роботов с ограниченной зоной видимости по сложным неизвестным двумерным областям; предложена новая метрика для оценки степени равномерности покрытия области. Обоснование предложенных разработок выполнено на основе компьютерных экспериментов и многокритериального сравнения результатов семи алгоритмов, включающих пять ранее известных методов и два метода, предложенных в диссертации. Все рассмотренные методы, включая предложенные, применяют концепцию виртуальных сил. Показано, что по комплексу метрик предложенные алгоритмы не уступают конкурентам, а по проценту и степени равномерности покрытия превосходят их в сложных сценах с препятствиями.
5. Для роботов с динамикой второго порядка, неопределённостями и ограниченной зоной видимости разработан, включая строгое обоснование, новый распределённый протокол формирования равномерной замкнутой цепи, основывающийся на измерениях циклической выходной переменной неизвестного периода и обеспечивающий заданный временной профиль скорости движения, в том числе в условиях начальной несвязности информационного графа. Предложенный протокол робастен к смене состава команды и гарантирует отсутствие столкновений.

Теоретическая и практическая значимость работы

Ценность результатов работы обусловлена значением и перспективами применения технологий и алгоритмов роевой робототехники в различных прикладных областях, а также в инженерных и естественных науках.

Теоретическая значимость диссертации состоит в развитии методов анализа и синтеза распределённых законов управления однородными

роями робототехнических агентов в условиях ограниченных ресурсов: информационных, сенсорных, коммуникационных, энергетических и т.п. С теоретической точки зрения диссертация обогащает арсенал современной теории многоагентных робототехнических систем, вводя ряд новых алгоритмических решений и развивая методы изучения сходимости, эволюции информационной связности и отсутствия внутригрупповых столкновений.

Практическая значимость обусловлена применимостью предложенных алгоритмов к задачам мониторинга, инспекции, поисково-спасательных операций, экологического контроля, автономного разминирования, очистки корпуса судна, мониторинга мест захоронения отходов на дне океана, патрулирования границ, обнаружения источников загрязняющих веществ и шлейфов, мониторинга лесных пожаров, обнаружения разливов нефти, поиска в экстремальных условиях окружающей среды, технического осмотра, поиска и захвата целей и т. д. Особый интерес они представляют в сценариях минимальной априорной информации об операционной среде, при наличии существенных ограничений на сенсорные возможности роботов, например на дистанцию сенсорного контакта или доступ к системам позиционирования, а также при наличии проблем с устойчивой связью между агентами. Экспериментальная проверка подтверждает принципиальную работоспособность подхода в условиях практического применения, в частности при наличии погрешностей датчиков и идеализаций в теоретической модели.

Соответствие паспорту специальности

Тема и результаты диссертации соответствуют паспорту научной специальности 2.3.1 — «Системный анализ, управление и обработка информации, статистика» в части разработки теоретических основ, методов и алгоритмов управления сложными системами, включая многоагентные и распределённые системы управления, а также методов обработки информации в условиях неопределённости и ограничений на доступные данные.

Методология и методы исследования

В работе используются методы теории управления многоагентными системами, теории распределённых алгоритмов достижения консенсуса, теории устойчивости динамических систем, теории скользящих режимов

управления, элементы геометрического и комбинаторного анализа конфигураций, компьютерное моделирование, а также натурные эксперименты с физическими моделями роботов.

Положения, выносимые на защиту

1. Распределённый алгоритм управления роем роботов типа машины Дубинса, обеспечивающий формирование плотнейшего поперечного барьера в неизвестном свободном коридоре и его движение с заданной скоростью вдоль коридора с прямыми стенками в условиях отсутствия связи, нумерации роботов, знания размера команды и при ограниченной дистанции сенсорной видимости.
2. Распределённый алгоритм управления роем роботов с кинематикой интегратора, гарантирующий прохождение неизвестного коридора с многоугольными препятствиями и искривлёнными стенками без столкновений и при сохранении эффективной поперечной формации; обоснование возможности решения задачи вычислительно нетребовательным алгоритмом.
3. Нелинейные распределённые алгоритмы самораспределения роя анонимных роботов в узлы одномерной решётки с заданным шагом и к равномерному распределению на неизвестном интервале; обоснование возможности в определённых сценариях гарантированного формирования информационной связности команды за счёт минимальных вычислительных затрат.
4. Два алгоритма самораспределения по неизвестным сложным двумерным областям в условиях отсутствия доступа к системам позиционирования.
5. Распределённый алгоритм управления роем роботов, обеспечивающий его равномерное самораспределение в замкнутую цепь по отношению к заданной циклической выходной переменной и отслеживание заданного временного профиля скорости для роботов с динамикой второго порядка и динамическими неопределённостями в условиях отсутствия начальной информационной связности.

Степень достоверности результатов

Достоверность полученных результатов обеспечивается математически строгими доказательствами нелокальной сходимости для ключевых сценариев, согласованностью теоретических утверждений с результатами компьютерного моделирования, а также экспериментами на физических моделях роботов.

Апробация результатов работы

Основные результаты работы были представлены в виде устных докладов на следующих конференциях:

- 29th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2021), Бари, Италия, 2021;
- European Control Conference (ECC 2021), Роттердам, Нидерланды, 2021;
- 22nd International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2022), Чеджу, Республика Корея, 2022;
- XXIV конференция молодых учёных «Навигация и управление движением», Санкт-Петербург, 2022;
- ANS Conference Series: Regular and Chaotic Dynamics, Ижевск, 2023;
- 7th International Conference on Robotics, Control and Automation Engineering (RCAE 2024), 2024;
- Fourth International Conference on Computer Communication and Network Security (CCRIS 2024), 2024.

Эти результаты также докладывались на семинарах направления «Математическая робототехника и искусственный интеллект» НТУ «Сириус», руководимых профессорами Л.М. Фридманом, Д.В. Баландиным и С.В. Гусевым, а также на семинаре кафедры теоретической кибернетики Санкт-Петербургского государственного университета, руководимом профессорами А.С. Матвеевым и А.Л. Фрадковым. Результаты диссертации использованы в работах по гранту в рамках выполнения государственной программы федеральной территории «Сириус» «Научное и технологическое развитие федеральной территории «Сириус»», соглашение № 18-03 от 10.09.2024.

Личное участие автора

Все основные результаты диссертации получены автором лично. Постановка задач и общее научное руководство осуществлялись научным руководителем А.С. Матвеевым. В работах [72—79] соавтору принадлежит постановка задач и консультативное участие; разработка алгоритмов, доказательства утверждений (в заявленном объёме), численные эксперименты и подготовка текстов выполнены автором. В работе [80] результаты получены совместно с А.С. Матвеевым и К.А. Гордиевичем: постановка задачи принадлежит научному руководителю, разработка и обоснование алгоритмов — автору; К.А. Гордиевич проводил компьютерное моделирование в симуляторе Gazebo с использованием ROS в условиях, приближённых к реальным, автор выполнял тесты компьютерного моделирования в среде Jupyter Notebook на языке Python в условиях, приближённых к теоретическим. В тезисах [81] все результаты получены автором лично. В работе [82] результаты получены совместно с соавторами; вклад автора состоит в разработке и анализе алгоритмов управления. В тезисах [83] результаты получены совместно с К.А. Гордиевичем: К.А. Гордиевич проводил компьютерное моделирование в симуляторе Gazebo с использованием ROS, автор использовал среду Jupyter Notebook и язык Python.

Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 12 печатных изданиях, 5 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 7 — в трудах конференций и тезисах докладов. Основные результаты глав 1, 2, 3, 4 и 5 изложены соответственно в работах [72], [80], [73], [74] и [75].

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка литературы и приложений. Общий объём работы составляет 203 страниц, включая 49 рисунков, 2 таблицы, 211 наименований в списке литературы и 4 приложения. Ниже кратко

охарактеризовано содержание глав; актуальность, обзор литературы и новизна каждой темы раскрываются во введениях к соответствующим главам.

Глава 1 посвящена задаче комбинированного заметающего и барьерного покрытия коридора роем роботов типа машины Дубинса: реактивный закон управления выстраивает рой поперёк неизвестного коридора в наиболее плотный поперечный барьер и обеспечивает его движение вдоль коридора с заданной скоростью.

Глава 2 рассматривает родственный сценарий заметающего покрытия коридора в случае роботов с кинематикой интегратора первого порядка и коридора со статическими (и в моделировании — динамическими) препятствиями и искривлёнными стенами; работоспособность подтверждена экспериментами на физических моделях UGV.

Глава 3 изучает нелинейные протоколы равномерного самораспределения однородной команды роботов (размещение в узлах решётки с заданным шагом и равномерное распределение на неизвестном интервале), в том числе с установлением информационной связности «из ничего», и их приложения.

Глава 4 представляет алгоритмы статического самораспределения роя роботов по неизвестным сложным двумерным областям в условиях отсутствия доступа к системам позиционирования и сравнительный анализ группы алгоритмов по комплексу метрик качества покрытия.

Глава 5 рассматривает самоорганизацию однородного роя роботов в равномерную замкнутую цепь для роботов с динамикой второго порядка с неопределённостями и иллюстрирует результаты применительно к задаче заметающего покрытия одномерного барьера в 3D.

ГЛАВА 1. Плотное заметающее покрытие коридора роем неголономных роботов

Актуальность

Как отмечалось во введении к диссертации, заметающее покрытие протяжённых объектов и территорий роями мобильных роботов востребовано в разведке, автоматизированном разминировании, инспекции, экологическом мониторинге, патрулировании границ и ряде смежных миссий [1—3, 5]. Для крупномасштабных команд внешнее развёртывание часто непрактично, поэтому привлекательно автономное саморазвёртывание из сравнительно случайных начальных положений [3, 7, 9, 10, 13]. В коридорообразных сценах (полоса между двумя стенами — физическими или условными) естественной целью является сочетание *барьерного* и *заметающего* покрытия по классификации [53]: команда неизвестного размера должна выстроиться поперёк неизвестного коридора в наиболее плотный сетчатый барьер и перемещать его вдоль коридора с заданной скоростью. Такой режим актуален, в частности, когда требуется систематически «пройти» коридор, сохраняя поперечный контроль сечения.

Состояние затронутой области исследований и её дефициты

Как отмечалось во введении, основной массив работ по покрытию сосредоточен на планировании пути для одного или нескольких роботов [24, 25, 27—31] и на геометрических аспектах задачи, оставляя исполнение движения и кинематические ограничения на неспецифицированный нижний уровень; для статического саморазвёртывания известны таксономии и классы методов (*pattern-/grid-based*, виртуальные силы и др.) [34, 38—40, 43—45, 50, 84—88], однако они ориентированы преимущественно на достижение неподвижной конфигурации. Для многоагентного заметающего покрытия коридоров известны подходы с дискретным временем и нижней границей на период дискретизации, пропорциональной радиусу чувствительности [3, 54]; такая граница затрудняет

своевременное обновление управления, осложняет анализ столкновений между тактами и опирается на синхронизацию часов в крупной сети ресурсодефицитных устройств [89, 90]. Кроме того, типичны предположения о наличии связи между агентами либо об упрощённой модели «свободных частиц» без неголономности и ограничений на управления. Строгие гарантии нелокальной сходимости при одновременном учёте неголономности, ограниченной зоны видимости, отсутствия связи и анонимности команды остаются немногочисленными [8].

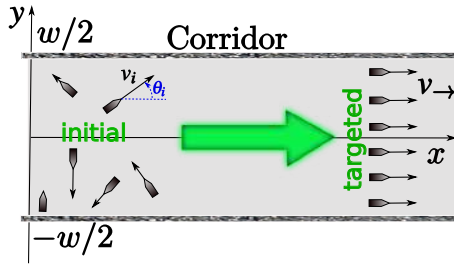
Новизна результатов главы

В главе рассматривается рой роботов типа машины Дубинса с ограниченной зоной видимости в коридоре (в теоретической части — полоса между двумя параллельными прямыми; в моделировании допускаются более общие стены). Роботы не знают размера команды и ширины коридора, не различают друг друга, не выполняют различных ролей и не имеют средств связи; в локальной системе каждый определяет направление коридора и относительные положения объектов в зоне видимости, а также измеряет собственную скорость. Предлагается вычислительно простой *реактивный* непрерывный закон управления (в смысле, разъяснённом во введении к диссертации), который формирует заметающий поперечный барьер, исключает столкновения роботов друг с другом и со стенами и допускает цифровую реализацию без жёстких ограничений на период дискретизации. Основной технический вклад — строгое обоснование нелокальной сходимости; робастность к искривлениям стен, препятствиям и неидеальностям иллюстрируется моделированием.

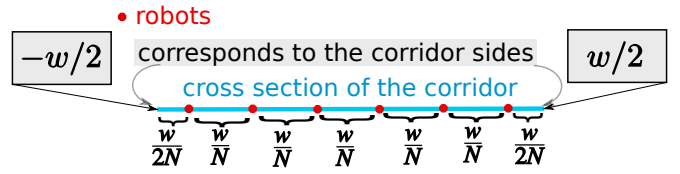
Изложение открывается постановкой задачи, затем описываются модель и закон навигации, формулируются основные теоретические результаты и приводятся результаты компьютерного моделирования.

1.1. Постановка задачи

Рассматривается рой из N роботов, пронумерованных от 0 до $N - 1$. Они находятся в *коридоре* $\mathcal{C}$ между двумя параллельными линиями и должны сформировать плотнейшую сеть поперёк него, перемещаясь вдоль $\mathcal{C}$ с заданной скоростью $v_{\text{des}} > 0$. Более детально, роботы должны выстроиться поперёк коридора и распределиться по поперечному сечению $\mathcal{C}$ так, чтобы максимальное расстояние от точки сечения до ближайшего робота было минимальным. При этом группа должна двигаться вдоль коридора с заданной скоростью v_{des} , сохраняя формацию (рис. 1.1(a)), и должно гарантироваться отсутствие столкновений между роботами и со стенками коридора.



а) Формирование
плотнейшей сети



б) Оптимальное распределение для $N = 6$

Рисунок 1.1 — Динамическое покрытие коридора с параллельными стенками

Роботы не имеют средств коммуникации, не различают друг друга (включая отсутствие доступа к номерам), не могут выполнять специализированные роли и следуют общему закону управления. Они не знают размера команды N и ширины коридора w . В локальной системе координат каждый робот определяет направление коридора и относительные позиции объектов (включая стенки) в пределах радиуса обнаружения $R_{\text{sen}} > 0$, а также измеряет собственную скорость.

Цель управления задаётся в правой декартовой системе (*абсолютной*), где стенки коридора заданы уравнениями $y = \pm w/2$, а ось x направлена вдоль движения. Как будет показано ниже, оптимальное распределение N роботов в поперечном сечении $C(x_*) := \{(x, y) : x = x_*, |y| \leq w/2\}$ достигается при размещении в точках $e_j(x_*) \in C(x_*), j = 0, \dots, N - 1$ с абсциссой x_* и ординатами $y_j = -w/2 + w/(2N) + jw/N$ (рис. 1.1(б)). При таком размещении

максимальное расстояние от точки $C(x_*)$ до ближайшего робота составляет $w/(2N)$, а расстояние между соседними роботами w/N .

Требуется разработать закон управления, следуя которому рой ведёт себя следующим образом при независимом выполнении закона каждым роботом.

Определение 1.1.1. Роботы *формируют плотнейшую сеть, перемещающуюся вдоль коридора со скоростью v_{des}* , если они не сталкиваются друг с другом и со стенками, и существует нумерация роботов и число x_* такие, что $\|r_i(t) - e_i(tv_{des} + x_*)\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \forall i$.

1.2. Модель роботов и закон навигации

Используется следующая кинематическая модель робота i типа машины Дубинса:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= v_i(t) \cdot \cos \theta_i(t), & \dot{v}_i(t) &= a_i(t), & |a_i(t)| &\leq \bar{a}, \\ \dot{y}_i(t) &= v_i(t) \cdot \sin \theta_i(t), & \dot{\theta}_i(t) &= \omega_i(t), & |\omega_i(t)| &\leq \bar{\omega}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь v_i и θ_i — линейная скорость и угол курса робота соответственно (рис. 1.1(a)); угловая скорость ω_i и тангенциальное ускорение a_i являются управляющими воздействиями; границы $\bar{a} > 0$ и $\bar{\omega} > 0$ заданы. Модель (1.1) считается справедливой при условии, что скорость $|v_i|$ не превышает порог $\bar{v} > 0$. Регулятор должен соблюдать это ограничение.

Угол θ_i отсчитывается против часовой стрелки от оси x абсолютной системы до оси x локальной системы, совпадающей с направлением движения робота. Робот i имеет доступ к θ_i благодаря знанию ориентации коридора в локальной системе, которая совпадает с направлением оси x абсолютной системы. Измеряя скорость v_i , робот может оценить свои проекции скорости $\dot{x}_i = v_i \cos \theta_i$, $\dot{y}_i = v_i \sin \theta_i$ в абсолютной системе.

Регулятор использует настраиваемые параметры, выбираемые разработчиком в соответствии с требованиями (см. ниже (1.9)–(1.11), (1.14)–(1.17), (1.19)). Параметры включают числа $\delta \in (0, R_{sen})$, $\bar{a}^x, \bar{a}^y > 0$, $\underline{v} > 0$, непрерывные кусочно-гладкие функции $\Upsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Xi : [0, 2R_{sen}] \rightarrow \mathbb{R}$ и функцию $W(\cdot) \in C^1([0, \infty) \rightarrow \mathbb{R})$.

Преобразование сенсорных данных в управление выполняется роботом i следующим образом:

Шаг 1: Вычисление модифицированного расстояния d_i^+ до ближайшего левого соседа и модифицированного расстояния d_i^- до ближайшего правого соседа:

$$d_i^\pm := \begin{cases} \min_{j \in J_i^\pm} \pm(y_j - y_i) & \text{если } J_i^\pm := \left\{ \begin{array}{l} j \neq i \text{ т.ч. } |x_j - x_i| < \delta, \\ |y_j - y_i| < \sqrt{R_{\text{sen}}^2 - \delta^2}, \\ \pm(y_j - y_i) > 0 \end{array} \right\} \neq \emptyset, \\ 2 \cdot |y_i \mp \frac{w}{2}| & \text{если } J_i^\pm = \emptyset, \sqrt{R_{\text{sen}}^2 - \delta^2} \geq 2 \cdot |y_i \mp \frac{w}{2}|, \\ \sqrt{R_{\text{sen}}^2 - \delta^2} & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.2)$$

Первое и второе условия в определении $J_i^\pm$ гарантируют, что $\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\| < R_{\text{sen}}$, поэтому робот i "видит" робота j и может определить y_j и $d_i^\pm$. Третье условие означает, что только роботы j слева от i учитываются для d_i^+ и справа — для d_i^- . Во втором случае робот "видит" стенку коридора и вычисляет расстояние $|y_i \mp \frac{w}{2}|$ без знания ширины w .

Шаг 2: Формирование множества соседей $\mathcal{N}_i(t)$ и их весов $w_{ji}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_i &:= \{j : \|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\| \leq R_{\text{sen}}, |x_j - x_i| \leq \delta\}, \\ w_{ji} &:= W[\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|/R_{\text{sen}}] \cdot W[|x_j - x_i|/\delta]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Робот i вычисляет w_{ji} для всех j , но в силу (1.11) только для видимых соседей $w_{ji} \neq 0$. По (1.3) $i \in \mathcal{N}_i(t)$, поэтому $|\mathcal{N}_i(t)| \geq 1$.

Шаг 3: Вычисление "целевой" скорости $\mathbf{v}_i(t)$ в декартовых координатах:

$$v_i^y(t) := \Xi[d_i^+(t)] - \Xi[d_i^-(t)], \quad (1.4)$$

$$v_i^x(t) := v_{\text{des}} + \frac{1}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} w_{ji}(t)} \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} w_{ji}(t) \Upsilon[x_j(t) - x_i(t)]. \quad (1.5)$$

Шаг 4: Вычисление "целевого" вектора ускорения $\mathbf{a}_i(t)$:

$$a_i^x(t) := \bar{a}^x \cdot \mathbf{sgn}[v_i^x(t) - \dot{x}_i(t)], \quad a_i^y(t) := \bar{a}^y \cdot \mathbf{sgn}[v_i^y(t) - \dot{y}_i(t)]. \quad (1.6)$$

Здесь $\bar{a}^x, \bar{a}^y > 0$ — настраиваемые параметры регулятора.

Шаг 5: Вычисление управляющих воздействий:

$$a_i(t) := \begin{cases} \mathbf{sat}_{\bar{a}} [a_i^x \cos \theta_i + a_i^y \sin \theta_i] & \text{если } v_i \geq \underline{v}, \\ \bar{a} \cdot \mathbf{sgn} [v_i^x(t) - \dot{x}_i(t)] & \text{иначе,} \end{cases} \quad (1.7)$$

$$\omega_i(t) := \begin{cases} \mathbf{sat}_{\bar{\omega}} \{v_i^{-1} [a_i^y \cos \theta_i - a_i^x \sin \theta_i]\} & \text{если } v_i \geq \underline{v}, \\ -\bar{\omega} \cdot \mathbf{sgn} \dot{y}_i & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.8)$$

Здесь $\underline{v} > 0$ — параметр регулятора; $\mathbf{sat}_b(z) := \max\{-b; \min\{b; z\}\}$ — функция насыщения. Выходы (1.7), (1.8) удовлетворяют ограничениям из (1.1).

Условия на относительные координаты $x_j - x_i$ и $y_j - y_i$ робота j из первой строки в (1.2) и определение множества $\mathcal{N}_i$ в (1.3) означают, что выполнение шагов 1–3 роботом i основывается исключительно на его собственных сенсорных данных, т.е. на относительных положениях роботов j , находящихся в пределах диапазона обнаружения R_{sen} робота i , и на направлении коридора. Знание направления позволяет роботу i преобразовывать эти положения из своей локальной системы координат в абсолютную, как того требует алгоритм. Дополнительно, шаги 4 и 5 используют продольную и поперечную скорости робота i относительно коридора, которые также выводятся из сенсорных данных робота i , как обсуждалось ранее. Таким образом, закон управления не требует коммуникации между роботами.

Роль шага 3 заключается в генерации (в режиме обратной связи) профиля скорости, который теоретически должен привести к достижению цели управления, если этот профиль будет реализован. Однако скорость не является непосредственно управляемой величиной для системы (1.1). На шаге 4 генерируется вектор ускорения, который должен асимптотически приближать реальный вектор скорости к выходу шага 3. Однако вектор ускорения всё ещё не является управляющим воздействием. Основная цель шага 5 — построить выполнимые управляющие воздействия, которые должны устранить разницу между реальным вектором ускорения и выходом шага 4.

Решение для замкнутой разрывной системы понимается в смысле Филиппова [91]. Для заданного начального состояния такое решение существует при всех $t \geq 0$, так как управления ограничены.

Полный список параметров регулятора:

δ используется в (1.2), (1.3)	$\Xi(\cdot)$ используется в (1.4)	$\Upsilon(\cdot)$ из (1.5)
$W(\cdot)$ используется в (1.3)	$\bar{a}^x, \bar{a}^y$ из (1.6)	$\underline{v}$ из (1.7), (1.8)

Требования к функциям $\Xi(\cdot), \Upsilon(\cdot), W(\cdot)$:

$$x\Upsilon(x) \underset{\forall x \neq 0}{>} 0, \Upsilon'(0) > 0, \overline{\Upsilon}_{\pm} := \sup_x \pm \Upsilon(x) < \infty, \overline{\Upsilon}' := \sup_x |\Upsilon'(x)| < \infty, \quad (1.9)$$

$$\Xi(0) \geq 0, \exists R_{\Xi} \in (0, R_{\text{sen}}] : \begin{cases} \Xi'(L) > 0 \ \forall L \in [0, R_{\Xi}), \\ \Xi'(L) = 0 \ \forall L \in (R_{\Xi}, 2R_{\text{sen}}], \end{cases} \quad (1.10)$$

$$W(z) = 0 \ \forall z \geq 1, \ W(0) = 1, \ W'(0) = 0, \ W(z) \in (0, 1] \ \forall z \in [0, 1]. \quad (1.11)$$

Примеры: $W(z) = \frac{1}{2}[\cos(\pi z) + 1]$ при $z \in [0, 1]$, $W(z) := 0$ иначе; $\Upsilon(x) = a\lambda_*(x/b)$; $\Xi(L) := cL + d$ при $L < R_{\Xi}$, $\Xi(L) = cR_{\Xi} + d$ иначе, где $\lambda_*(z) = \arctan(z), \tanh(z), \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$. Параметр R_{Ξ} настраивается.

1.2.1. Комментарии к неформальным идеям, лежащим в основе закона управления

Частично они основаны на предположении, что рано или поздно начнётся непрерывное скользящее движение (СД) по разрывным поверхностям (1.6). В СД л.ч. уравнений (1.4) и (1.5) представляют собой соответствующие координаты реальной скорости. Предполагая для упрощения $R_{\text{sen}}, R_{\Xi} \approx \infty$, видим, что согласованное установившееся поведение в замкнутом контуре задаётся соотношениями: $v_i^x(t) = v_{\text{des}} \ \forall i, t$, $x_i(t) = x_j(t) \ \forall i \neq j, t$, и $v_i^y(t) = 0, \Xi[d_i^+(t)] = \Xi[d_i^-(t)] \ \forall i, t$. Первые два уравнения означают выстраивание в линию поперёк коридора и движение вдоль него со скоростью v_{des} , как и требуется. Из последних двух уравнений и (1.9) следует $d_i^+(t) = d_i^-(t) \ \forall i$. Тогда (1.2) подразумевает, что расстояние между соседними роботами одинаково для всех и вдвое превышает расстояние от крайнего левого/правого робота до ближайшей стены коридора. Остаётся отметить, что такое распределение поперёк коридора является оптимальным и целевым, как обсуждалось в разделе 1.1.

В терминах $z_i(t) := x_i(t) - v_{\text{des}} \cdot t$, скользящее движение по разрывной поверхности первого выражения в (1.6) описывается уравнениями, представляющими собой нелинейный аналог *правила ближайших соседей* [92]:

$$\dot{z}_i = \frac{1}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ji}} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ji} \Upsilon[z_j - z_i]. \quad (1.12)$$

Это правило в различных модификациях широко исследуется как инструмент достижения консенсуса по значению z_i между агентами. Помимо (1.9), стандартные условия его сходимости включают определённые свойства связности изменяющегося во времени графа $\mathcal{G}(t)$ с узлами $0, \dots, N - 1$, где i и j соединены ребром тогда и только тогда, когда $j \in \mathcal{N}_i(t)$. Большинство критериев консенсуса постулируют выполнение этих свойств по определённым причинам, оставляя вопрос их обеспечения открытым. Существуют также исследования по управлению с сохранением связности (см., напр., [42, 61, 93] и литературу), где предпринимаются специальные меры для сохранения исходных связей между агентами. Однако это может сделать цель управления недостижимой. Пример: если все роботы изначально расположены так близко, что граф $\mathcal{G}(0)$ полный, а расстояние между крайними роботами в целевом распределении превышает R_{sen} . Переход к такому распределению требует разрыва некоторых связей в $\mathcal{G}(t)$. В данной работе сходимость выводится из явных предположений, легко проверяемых априори и подразумевающих более гибкую форму сохранения связности, не противоречащую цели управления.

Более привычная форма (1.12) — с $w_{ji} = 1$. В этом случае п.ч. (1.12) может разрывно изменяться при входе/выходе робота из множества $\mathcal{N}_i$. Тогда для первого выражения в (1.6) множество разрывов не является гладким многообразием и, более того, несвязно в пространстве состояний роя $(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t)$, что создаёт сложности для подхода скользящих режимов. Цель весов из (1.3) — обеспечить гладкость этого множества. Это достигается благодаря тому, что по (1.11) вес w_{ji} плавно уменьшается до нуля при приближении соседа j к ситуации « $\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\| = R_{\text{sen}}$ или $|x_j - x_i| = \delta$ », где его принадлежность к $\mathcal{N}_i$ может измениться. Третье уравнение в (1.11) обеспечивает гладкость вблизи состояний с $\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_i$ или $x_j = x_i$, где выражения $\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|$ и $|x_j - x_i|$ не дифференцируемы, в отличие от их квадратов.

Поставленная цель реалистична только если $v_{\text{des}} \leq \bar{v}$ и $\frac{w}{N} \leq R_{\text{sen}}$. Первое означает, что желаемая скорость соответствует ограничению скорости робота после (1.1). Нарушение второго ($w/N > R_{\text{sen}}$) означает потерю обратной связи по нормальным расстояниям $|y_i - y_j|$ при оптимальном распределении, так как роботы выходят за пределы зоны обнаружения друг друга. Тогда достижение и поддержание желаемого распределения затруднительно. Эти необходимые условия слегка усиливаются, предполагая, что

$$v_{\text{des}} < \bar{v}, \quad w/N < R_{\text{sen}}. \quad (1.13)$$

1.3. Предположения и основные результаты

Перед использованием регулятора из раздела 1.2 необходимо выполнить гарантированно осуществимый манёвр. Детали его реализации опускаются из-за их тривиальности; описывается только требуемый результат.

Предположение 1.3.1. Изначально роботы неподвижны, расположены внутри коридора на различных расстояниях от его стен, ориентированы параллельно им в целевом направлении и все находятся в общей перпендикулярной полосе, ширина которой (вдоль коридора) меньше δ из (1.2).

Правильная высадка роботов в коридор — естественный способ выполнения этих требований. При этом последнее свойство из предположения 1.3.1 может быть достигнуто размещением всех роботов близко друг к другу, что является стандартной практикой. Если это сделано в соответствии с непрерывным распределением вероятностей, роботы с вероятностью 1 окажутся на различных расстояниях от стен. Автоматически любой робот может достичь требуемой ориентации через круговое движение почти на месте (чтобы избежать столкновений, выхода из полосы и совпадения расстояний до стен для разных роботов) с последующим торможением до полной остановки без изменения ориентации. В этом случае основной закон управления активируется, если робот «видит», что все имеют нужную ориентацию, и это состояние сохраняется в течение времени, достаточного для остановки любого робота. Это правило предполагает, что роботы могут определять ориентацию видимых соседей и высажены так близко, что каждый видит всю команду.

Теорема 1.3.2. Пусть выполнены (1.13) и предположение 1.3.1. Тогда числовые параметры $\delta, \underline{v}, \bar{a}^x, \bar{a}^y$ и функции $\Upsilon(\cdot), \Xi(\cdot), W(\cdot)$, используемые законом управления (1.2)–(1.8), могут быть выбраны так, что для замкнутой системы верны следующие утверждения:

- i) Роботы формируют плотнейшую сеть, перемещающуюся по коридору со скоростью v_{des} (см. определение 1.1.1);
- ii) Они соблюдают ограничение скорости $v_i < \bar{v}$, введённое после (1.1), и всегда движутся вдоль коридора в целевом направлении $\dot{x}_i(t) > 0 \forall t > 0$;

iii) Разброс $\varsigma(t) := \max_{i,j} |x_i(t) - x_j(t)|$ роботов вдоль коридора не увеличивается со временем t .

Доказательства утверждений из раздела 1.3 приведены в приложении А.1.

Обсудим настройку регулятора, т.е. выбор $\delta, \underline{v}, \bar{a}^x, \bar{a}^y$ и функций $\Upsilon(\cdot), \Xi(\cdot), W(\cdot)$.

Параметры $\underline{v}$ и δ выбираются так, что

$$0 < \underline{v} < v_{\text{des}}, \quad 0 < \delta < \sqrt{R_{\text{sen}}^2 - w^2/N^2}. \quad (1.14)$$

Здесь подкоренное выражение положительно благодаря второму соотношению из (1.13).

Параметры $\bar{a}^x$ и $\bar{a}^y$ в (1.6) выбираются с учётом ограничений из (1.1) и так, что

$$(\bar{a}^x)^2 + (\bar{a}^y)^2 \leq \min \{ \bar{a}^2; \underline{v}^2 \bar{\omega}^2 \}, \quad \bar{a}^x, \bar{a}^y > 0. \quad (1.15)$$

Параметр R_{Ξ} в (1.10) выбирается так, что

$$w/N < R_{\Xi} < \sqrt{R_{\text{sen}}^2 - \delta^2}. \quad (1.16)$$

Это возможно благодаря второму соотношению в (1.14).

Функция $\Xi(\cdot)$ выбирается так, чтобы выполнялись (1.10) и

$$4\bar{\Xi}'\bar{\Xi} < \bar{a}^y, \quad \bar{\Xi} < \sqrt{\bar{v}^2 - v_{\text{des}}^2}, \quad \text{где} \quad \bar{\Xi}' := \max_{z \in [0, R_{\Xi}]} \Xi'(z), \quad \bar{\Xi} := \max_{z \in [0, R_{\Xi}]} \Xi(z). \quad (1.17)$$

Это возможно благодаря первому неравенству в (1.13). Пример рекомендуемого выбора: $\Xi(z) := cz \quad \forall z \in [0, R_{\Xi}], \Xi(z) := cR_{\Xi} \quad \forall z > R_{\Xi}$, где $0 < c < \min \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\bar{a}^y/R_{\Xi}}; R_{\Xi}^{-1} \sqrt{\bar{v}^2 - v_{\text{des}}^2} \right\}$.

Функция $W(\cdot)$ класса C^1 выбирается так чтобы выполнялось (1.11). После этого вычисляется

$$\bar{W} := \max_{z \in [0, 1]} |W(z)|, \quad \bar{W}' := \max_{z \in [0, 1]} |W'(z)|. \quad (1.18)$$

Верхние границы $\bar{\Upsilon}_{\pm}, \bar{\Upsilon}'$ из (1.9) определяются до выбора самой функции $\Upsilon(\cdot)$. Они должны удовлетворять:

$$\bar{\Upsilon}_{-} < v_{\text{des}} - \underline{v}, \quad (v_{\text{des}} + \bar{\Upsilon}_{+})^2 + \bar{\Xi}^2 \leq \bar{v}^2, \quad (1.19)$$

$$2N\kappa \max\{\bar{\Upsilon}_{-}; \bar{\Upsilon}_{+}\} + 2\bar{\Upsilon}'[v_{\text{des}} + \bar{\Upsilon}_{+}] < \bar{a}^x,$$

$$\text{где } \kappa := 2\bar{W}\bar{W}'[\bar{v}/R_{\text{sen}} + (v_{\text{des}} + \bar{\Upsilon}_{+})/\delta]. \quad (1.20)$$

Благодаря (1.14) и (1.17) это можно достичь выбором достаточно малых $\bar{\Upsilon}_{\pm} > 0$, $\bar{\Upsilon}' > 0$.

Функция $\Upsilon(\cdot)$ затем выбирается с учётом (1.9) так, что супремумы из (1.9) и максимумы (1.18) не превышают значений, определённых на предыдущем шаге. Пример: $\Upsilon(z) := 2\bar{\Upsilon}_{-}/\pi \arctan(cz) \forall z \leq 0$, $\Upsilon(z) := 2\bar{\Upsilon}_{+}/\pi \arctan(cz) \forall z \geq 0$, где $c = \pi\bar{\Upsilon}'/(2 \max\{\bar{\Upsilon}_{-}; \bar{\Upsilon}_{+}\})$.

Теорема 1.3.3. Пусть выполнены (1.13) и предположение 1.3.1, а также соблюдены приведённые рекомендации по выбору $\delta, \underline{v}, \bar{a}^x, \bar{a}^y$ и функций $\Upsilon(\cdot), \Xi(\cdot), W(\cdot)$. Тогда для замкнутой системы верны утверждения **i)–iii)** из теоремы 1.3.2.

1.4. Тесты компьютерного моделирования

Тесты проводились с числовыми параметрами, приведёнными в таблице 1, где τ — период обновления управления, $\Xi(\cdot)$ — линейная функция с насыщением при пороге R_{Ξ} (в таблице показана только линейная часть), и $W(z) = 0 \forall z \geq 1$. Используемые параметры регулятора не полностью соответствуют (1.14)–(1.20), чтобы продемонстрировать робастность регулятора и более широкую область сходимости, чем теоретически предсказанная. Размер команды N и начальное распределение роботов варьировались от теста к тесту. Показания позиции и скорости искажались аддитивными шумами с нулевым средним, равномерно распределёнными в радиусе 0.05 м и 0.02 м/с соответственно. Современные датчики расстояния обеспечивают точность порядка нескольких миллиметров при типичных измеряемых расстояниях 0.3 – 1.0 м в проведённых тестах. Неидеальность исполнительных устройств моделировалась добавлением шумов с нулевым средним, равномерно распределённых в $[-0.075\bar{a}, 0.075\bar{a}]$ и $[-0.075\bar{\omega}, 0.075\bar{\omega}]$ к управляющим воздействиям a_i и ω_i соответственно.

Таблица 1 — Параметры, использованные в моделировании

$\bar{a} = 5.0 \text{ м/с}^2$	$\bar{\omega} = 2.0 \text{ рад/с}$	$\bar{v} = 4.0 \text{ м/с}$	$R_{\text{sen}} = 0.9 \text{ м}$	$w = 3.0 \text{ м}$
$\bar{a}^x = 2.5 \text{ м/с}^2$	$\bar{a}^y = 4.0 \text{ м/с}^2$	$\delta = R_{\text{sen}}/\sqrt{2}$	$v_{\text{des}} = 1.0 \text{ м/с}$	$\Upsilon(x) = \frac{0.42x}{\sqrt{1+x^2}}$
$\underline{v} = 0.25 \text{ м/с}$	$\Xi(d) = 0.042d$	$R_{\Xi} = 0.9R_{\text{sen}}$	$\tau = 0.1 \text{ с}$	$W(z) = \frac{[\cos(\pi z)+1]}{2}$

На рисунках 1.2–1.3 показаны траектории роботов за ≈ 20.0 с. Их положения с шагом 0.4 с отмечены малыми треугольниками, визуализирующими ориентацию. После начального этапа роботы выстраиваются вдоль прямой, перпендикулярной коридору, что позволяет легко идентифицировать распределение команды в конкретный момент. Эти снимки также иллюстрируют историю процесса выравнивания. Видеоматериалы доступны по ссылке: https://drive.google.com/drive/folders/1FqMCbybZ4sIHBMfaVz8_KK58jfeuha48?usp=sharing

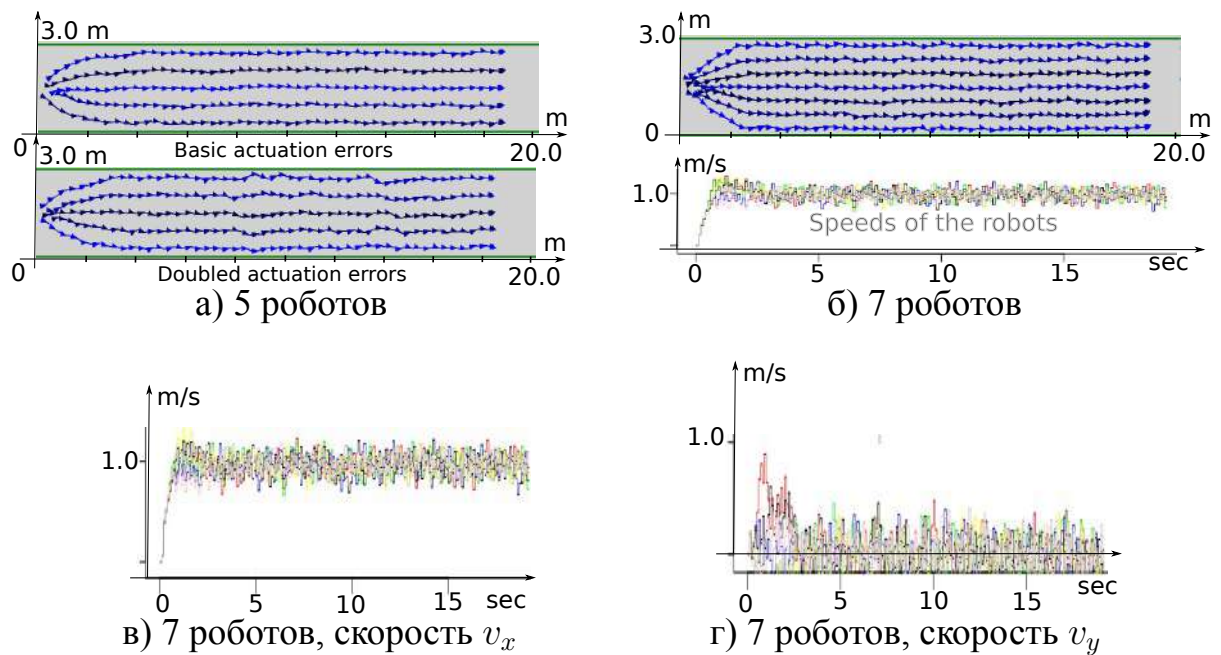


Рисунок 1.2 — Равномерное покрытие коридора с прямыми параллельными стенами

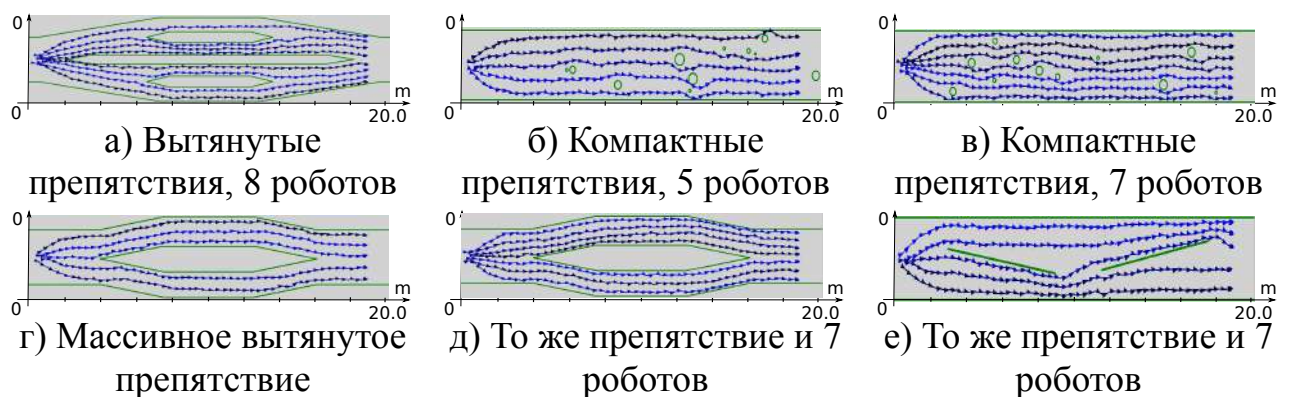


Рисунок 1.3 — Равномерное покрытие коридоров с препятствиями

С целью проверки теоретических выводов первая серия тестов была сосредоточена на коридорах с прямыми параллельными стенами. Три типичных результата показаны на рис. 1.2. Во всех случаях роботы изначально неподвижны и рассеяны в области диаметром ≈ 1.0 м. Роботы разгоняются до целевой скорости, выстраиваются перпендикулярно коридору и достигают почти оптимального распределения всего за ≈ 4.0 с, преодолев ≈ 4.0 м вдоль коридора. С этого момента они стабильно поддерживают скорость и распределение со средней ошибкой скорости около 0.2 м/с и позиционной ошибкой около 4.0 см. Последняя ошибка объяснима при уровне шума датчиков ≈ 5.0 см и наблюдалась в других экспериментах в том же коридоре. Таким образом, цель управления достигается с хорошей точностью, несмотря на ошибки измерений и исполнительных устройств (последние составляют 7.5% от максимального входного значения). Хотя эта ошибка уже значительна, в эксперименте на рис. 1.2(а) она была увеличена до 15.0% . Результат показывает, что качество управления регулятора остаётся удовлетворительной даже при столь больших ошибках управления.

Вторая серия тестов исследует способность закона управления справляться с изменениями размера команды без предварительного знания этого размера. В сценарии на рис. 1.4(а) команда из 7 роботов теряет 3 участника после достижения целевого режима при $x \approx 5.0$ м. Оставшиеся 4 робота применяют закон управления «как обычно», игнорируя отсутствующих, что приводит к быстрому (за ≈ 6.0 с при прохождении ≈ 6.0 м) восстановлению оптимального (для уменьшенной команды) распределения по коридору.

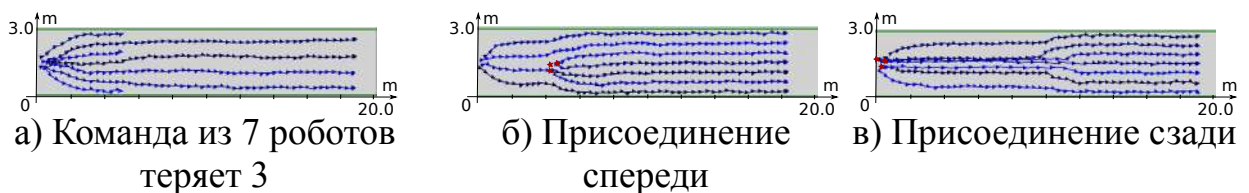


Рисунок 1.4 — Адаптация к изменению размера команды

На рис. 1.4(б) 4 робота встречают 3 неподвижных «новых участников» (красных), ожидающих присоединения к команде. Как только новый участник замечает, что какой-либо робот обгоняет его в проекции на ось x , он активирует алгоритм из раздела 1.2 и начинает движение. Видно, что за ≈ 3.0 с (и $\approx$

2.0 м пути) объединённая команда выравнивается поперёк коридора, достигает оптимального распределения со средней ошибкой около 4.0 см и разгоняется до целевой скорости, стабильно поддерживая эти параметры в дальнейшем. На рис. 1.4(в) 3 новых участника догоняют основную команду. Они появляются через 5.0 с после старта основной группы из 4 роботов. Изначально каждый новый участник движется прямолинейно со скоростью 2.0 м/с. Этот режим отключается, и регулятор из раздела 1.2 активируется, когда робот замечает, что догнал какого-либо участника в проекции на ось x . Для всех трёх это происходит практически одновременно при $x \approx 12.0$ м. После этого объединённая группа быстро (пройдя ≈ 2.0 м) достигает целевого поведения. Таким образом, алгоритм демонстрирует робастность к изменениям размера команды.

Третья серия тестов дополняет представленные теоретические исследования, рассматривая коридоры со сложными изогнутыми стенами. Здесь «направление коридора» понимается как направление его стены в данной точке и может меняться в зависимости от этой точки. Рассматривается децентрализованный метод, основанный на сенсорах и связи, для определения роботами этого направления. Этот метод основан на предположениях, что каждый робот может:

- передавать данные на конечное расстояние R_{com} , где $R_{\text{com}} > R_{\Xi}$, а R_{Ξ} взято из (1.10);
- определять ближайшую точку в видимой части стены коридора (если это возможно).

Чтобы погрузиться в детали введём следующие обозначения:

- $\vec{p}_i(t)$ — единичный вектор в направлении коридора, как его представляет робот i в момент t ;
- $\mathcal{N}_i^{\text{com}}(t) := \{j: j \neq i \mid \|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)\| < R_{\text{com}}\}$ — множество роботов, с которыми робот i может установить связь;
- $\vec{V}_i(t) \in \mathbb{R}^2$ — вспомогательная векторная переменная, используемая роботом i ; изначально $\vec{V}_i(0) := 0$.

Рассмотрим два сценария:

- sc.1** Все роботы имеют доступ к общей системе отсчёта и используют её для описания вектора $\vec{p}_i(t)$;
- sc.2** Каждый робот описывает $\vec{p}_i(t)$ в локальной системе отсчёта, связанной с его корпусом, и может преобразовывать единичные векторы из локальных систем видимых соседей в свою собственную.

Последнее обычно возможно благодаря способности определять ориентацию видимых партнёров. В (1.4)—(1.8) робот i интерпретирует v_i^x, v_i^y, a_i^x и a_i^y как координаты в правой декартовой системе, чья x -ось направлена вдоль $\vec{p}_i(t)$. Каждый робот получает начальное значение $\vec{p}_i$, которое затем пересчитывается с заданным временным шагом $\tau_d > 0$. Для этого каждый робот транслирует текущее значение $\vec{p}_i$ в моменты $t_k := k\tau_d, k = 0, 1, \dots$ и учитывает доступные мнения соседей о направлении коридора. Если робот «видит» стену коридора, он определяет локальное направление как перпендикуляр к отрезку, соединяющему робота с ближайшей точкой видимой части стены (вычисляя касательную), и использует это для обновления $\vec{p}_i$. Это делается в неявной манере. Во-первых, робот сглаживает результаты вычисления касательной с помощью переменной $\vec{V}_i$ и коэффициента дисконтирования $\alpha \in (0, 1)$, что особенно полезно при резких изменениях наклона стен. Во-вторых, учитывает мнения соседей. Более детально, робот i выполняет следующие действия в момент t_k :

- Формирует усреднённое мнение соседей о направлении: $\vec{p}_i^{\text{av}}(t_k) := |\mathcal{N}_i^{\text{com}}(t_k)|^{-1} \sum_{j \in \mathcal{N}_i^{\text{com}}(t_k)} \vec{p}_j(t_k)$ если $\mathcal{N}_i^{\text{com}}(t_k) \neq \emptyset$, иначе $\vec{p}_i^{\text{av}}(t_k) := 0$;
- Если робот i не видит стен: $\vec{p}_i(t_{k+1}) := \frac{\vec{p}_i^{\text{av}}(t_k)}{\|\vec{p}_i^{\text{av}}(t_k)\|}$ и $\vec{V}_i(t_{k+1}) := 0$ при наличии данных от соседей ($\mathcal{N}_i^{\text{com}}(t_k) \neq \emptyset$), иначе $\vec{p}_i(t_{k+1}) := \vec{p}_i(t_k)$;
- Если робот i видит стену:
 - Находит ближайшую точку $p_i(t_k)$ на видимой части стены;
 - Вычисляет единичный вектор $\vec{g}(t_k)$, перпендикулярный отрезку к $p_i(t_k)$ и ближайший по углу к $\vec{p}_i(t_k)$;
 - Обновляет: $\vec{V}_i(t_{k+1}) := \alpha \vec{V}_i(t_k) + \vec{g}(t_k)$, и $\vec{p}_i(t_{k+1}) := \frac{\vec{p}_i^{\text{av}}(t_k) + \vec{V}_i(t_k) / \|\vec{V}_i(t_k)\|}{\|\vec{p}_i^{\text{av}}(t_k) + \vec{V}_i(t_k) / \|\vec{V}_i(t_k)\|\|}$.

Если робот видит обе границы, имеет несколько ближайших точек или два перпендикуляра, выбирается случайный вариант. При делении на ноль алгоритм останавливается (в проведённых экспериментах этого не происходило).

На рис. 1.5 показана работа алгоритма в различных сценариях с изогнутыми стенами:

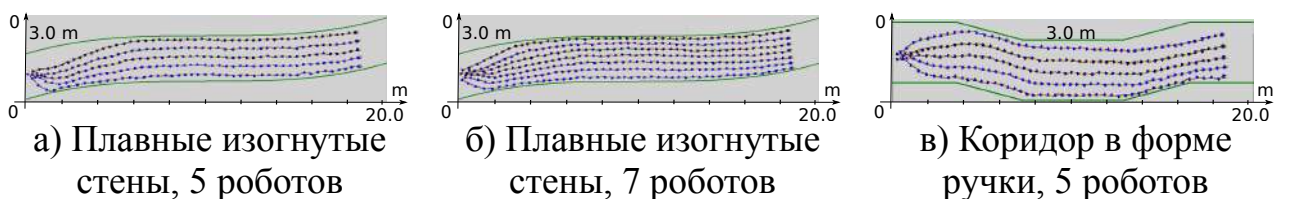


Рисунок 1.5 — Равномерное покрытие коридоров с изогнутыми стенами

Опуская детальный анализ каждого случая, можно заключить, что предложенная стратегия навигации успешно справляется с задачей плотного покрытия коридоров различной формы и демонстрирует хорошую робастность к неопределённостям и недостаткам данных.

Хотя закон управления из раздела 1.2 не предназначен для работы с препятствиями, последняя серия тестов исследует его способность справляться с ними. Любой робот, «видящий» препятствие, наивно интерпретирует его границу как стену коридора и обрабатывает связанные данные в соответствии с алгоритмом. Другими словами, робот заменяет ординату ближайшей точки препятствия на $\pm w/2$ во второй строке (1.2) (если между ними нет ординаты другого робота). На рис. 1.3 видно, что даже такое прямое применение закона управления приводит к разумному и успешному групповому поведению: команда избегает столкновений с препятствиями, рационально делится на подгруппы (каждая проходит через узкий подкоридор между препятствиями) и быстро восстанавливает целевое распределение после преодоления препятствий.

1.5. Заключение

В главе предложена простая распределённая реактивная стратегия управления, направляющая рой неголономных роботов типа машины Дубинса неизвестного размера на формирование плотного барьера поперёк коридора неизвестной ширины и на движение этого барьера вдоль коридора с заданной скоростью. Стратегия использует только локальные сенсорные данные каждого робота в конечной зоне видимости, не требует различения роботов друг от друга и применяет ко всем агентам идентичные правила управления. Работоспособность алгоритма обоснована математически строгим нелокальным результатом сходимости для коридоров с прямыми параллельными стенами и продемонстрирована компьютерным моделированием для изогнутых стен и сцен с препятствиями (в последнем случае — при непосредственном «наивном» применении закона).

Предложенный алгоритм опирается на парадигму скользящих режимов. При практической реализации возможный дребезг может быть ослаблен

известными приёмами (сглаживание вблизи поверхности разрыва, фильтры нижних частот, скользящие режимы высшего порядка и др.).

Теоретическая проработка коридоров с препятствиями и искривлёнными стенами при иной кинематической модели составляет предмет следующей главы. Перспективными направлениями остаются сценарии с несколькими последовательными барьерами, требование одновременного покрытия точки несколькими сенсорами и обобщение на трёхмерные среды.

ГЛАВА 2. Реактивная автономная самоорганизация однородных роев беспилотных наземных транспортных средств для покрытия коридора с препятствиями

Актуальность

Как уже отмечалось во введении к главе 1, комбинированное барьерное и заметающее покрытие коридорообразных сцен востребовано в разминировании, экологическом мониторинге, патрулировании, спасательных операциях и инспекции [5, 6, 53]. На практике коридор редко бывает пустым: внутри него типичны неизвестные препятствия, а стены — неидеально прямыми. При этом сохраняются требования однородности роя, отсутствия связи, неизвестности размера команды и ширины прохода, а также потребность в простом правиле, индивидуально исполняемом каждым агентом [8, 16]. Актуален и сценарий, когда регулярная линейная формация должна пройти через стеснённую среду, сохранив поперечный строй и восстановив равномерность после препятствий.

Положение дел и дефициты

Общий контекст распределённого покрытия и дефицит строгих гарантий нелокальной сходимости охарактеризованы во введении к диссертации и в главе 1; там же кратко отмечены планирование траекторий [26], статическое размещение в известных средах [32, 33, 35—37] и методы виртуальных сил / Вороного для статического покрытия [41—43, 46, 49—51, 55]. Коридороподобные среды активно изучаются (см., например, [94—99] и литературу там), однако в основном для одиночного робота; немногочисленные многоагентные результаты [3, 54, 72] либо не охватывают препятствия в постановке с сохранением прямого поперечного строя и плотнейшего распределения, либо недостаточны для строгого анализа при неизвестной многоугольной сцене. В литературе по заметающему покрытию коридоров с препятствиями при указанных неопределённостях и цели удержания

прямой поперечной формации ощутим дефицит завершённых теоретических обоснований. Отдельно отметим, что стандартный подход к обходу препятствий часто усложняет архитектуру управления; желательны схемы, в которых часть функций безопасности может быть совмещена с модулем поперечного распределения. Предварительные алгоритмические идеи (без полных доказательств) для упрощённого варианта сценария отражены в [100]; настоящая глава существенно расширяет постановку, алгоритм и даёт полное обоснование.

Новизна результатов главы

Глава развивает линию главы 1, переходя к кинематике простого интегратора с ограничением скорости и к сценам с конечным числом неизвестных многоугольных препятствий и, в обобщениях, — с непрямыми (многоугольными) стенами. Рассматривается полностью однородный рой UGV: агенты не используют связь, не знают N и w , не различают друг друга и применяют общее *реактивное* правило по локальным данным в конечной зоне видимости при незаслонённом обзоре. Цель — формирование плотнейшего поперечного барьера, движение с заданной скоростью, отсутствие столкновений и автоматическое восстановление равномерного распределения после полосы препятствий; при этом прямая поперечная формация и порядок в строю сохраняются даже при «разрезании» ряда препятствием. Новизна включает алгоритмические дополнения к бесконфликтной навигации в свободном коридоре [72], нелокальные теоремы сходимости для статических препятствий и искривлённых стен, проработку сценариев выбывания и пополнения команды, а также подтверждение моделированием (в том числе при динамических препятствиях и старте из нескольких «пещер») и экспериментами на физических UGV.

В главе формулируются теоретические предположения, описываются предобработка сенсорных данных и закон навигации, приводятся основные результаты сходимости, а также результаты моделирования и экспериментов.

2.1. Прохождение коридора с препятствиями

Рассматриваются N точечных UGV, пронумерованных $i = 1, \dots, N$, которые движутся в неизвестном планарном *коридоре* $\mathfrak{C}$ между двумя параллельными прямыми линиями. (Коридоры с не-прямыми стенами будут рассмотрены позже.) В результате перемещения, UGV должны начать двигаться вдоль коридора с общей заранее заданной скоростью $v_{\text{des}} > 0$ и оказаться на общем движущемся поперечном отрезке $\mathfrak{U}$, ориентированном перпендикулярно стенам; см. рис. 2.1. Также они должны равномерно распределиться по $\mathfrak{U}$, чтобы сформировать самую плотную сетку через коридор.

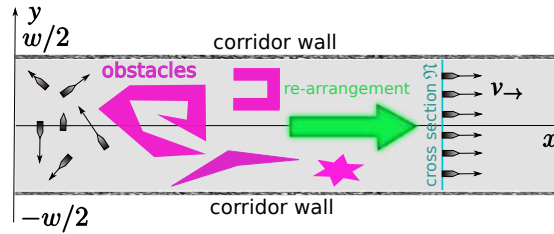


Рисунок 2.1 — Прохождение коридора с препятствиями

Задача осложняется наличием неизвестных препятствий $O_1, \dots, O_K$ внутри коридора (см. рис. 2.1). UGV не должны сталкиваться со стенами коридора, с препятствиями и друг с другом. Таким образом, равномерное распределение по всей ширине коридора возможно только в той его части, где нет препятствий: даже если команда подходит к препятствиям с идеальным распределением, это распределение неизбежно нарушается. Закон навигации должен автоматически восстанавливать распределение после прохождения полосы препятствий.

Рассматриваются точечные UGV с кинематикой простого интегратора и заданным ограничением скорости $\bar{v}$:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i, \quad \|\mathbf{v}_i\| \leq \bar{v}. \quad (2.1)$$

Вектор $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i(t) \in \mathbb{R}^2$ является управляющим входом. Каждый UGV имеет свою собственную локальную систему отсчёта. В этой системе он определяет ориентацию коридора и относительные координаты объектов, включая части препятствий и стены коридора, если они находятся в пределах заданного конечного *радиуса видимости* $R_{\text{sen}} > 0$ и линия видимости к ним

не заблокирована. Предполагаем, что ни один UGV не может полностью заблокировать видимость своих сотоварищей по отношению к любому препятствию, например, из-за превосходства препятствий по размеру или потому, что UGV могут "видеть" препятствия с высоты, превышающей уровень их сотоварищей.

Ни один из UGV не использует устройства связи и не знает числа N членов роя и ширины w коридора. Рой является полностью гомогенным: среди UGV нет иерархии, они не могут выполнять разные роли и должны управляться общей стратегией, при этом UGV не могут отличить друг друга. Таким образом, поставленные задачи должны решаться автономно и распределенно.

Формальная постановка задачи Рассматривается правосторонняя абсолютная система отсчёта; её ось x направлена вдоль целевого направления движения, по середине коридора параллельно его стенам; см. рис. 2.1. Таким образом, стены коридора описываются уравнениями $y = \pm w/2$. Для удобства изложения, оси x и y называют соответственно *горизонтальной* и *вертикальной*. Полярные углы отсчитываются против часовой стрелки от оси x .

Обозначим $\mathbf{p}_j(x)$ как точку $\mathbf{p}$, для которой $x(\mathbf{p}) = x$ и $y(\mathbf{p}) = -w/2 + jw/(N + 1)$, и отметим, что $\mathbf{p}_1(x), \dots, \mathbf{p}_N(x)$ равномерно распределены поперёк коридора. Местоположение UGV i в момент времени t обозначается как $\mathbf{r}_i(t) = [x_i(t), y_i(t)]$. Цель навигации следующая.

Определение 2.1.1. Говорят, что UGV *проходят сцену* со скоростью v_{des} , если выполняются следующие условия:

- i) Каждый UGV i не сталкивается с препятствиями $\mathbf{r}_i(t) \notin O_k \quad \forall k, t$, с границами коридора $|y_i(t)| < w/2 \quad \forall t$ и с другими UGV $\mathbf{r}_i(t) \neq \mathbf{r}_{i'}(t) \quad \forall t, i' \neq i$;
- ii) Существует x_* и нумерация UGV такие, что $\|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{p}_i(v_{\text{des}} \cdot t + x_*)\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad \forall i$.

Задача состоит в разработке общего для всех UGV управляющего закона, при независимом применении которого каждым UGV обеспечивается выполнение условия из определения 2.1.1, при условии, что начальные позиции в разумных пределах случайны.

2.2. Теоретические предположения

Предположение 2.2.1. Препятствия являются непересекающимися многоугольниками (необязательно выпуклыми) и расположены внутри коридора.

Это частично обосновано тем, что, во-первых, то, что в исследованиях робототехники рассматривается как «препятствие», часто является (верхним) приближением реального препятствия в виде многоугольных областей, а во-вторых, это приближение может быть сделано настолько точным, насколько это необходимо.

Луч (отрезок) называется *открытым*, если он не содержит своей начальной точки (концов). *Восходящий/нисходящий* луч — это вертикальный луч, распространяющийся вверх/вниз. Множество называется *свободным от O_k* , если у него нет общих точек с O_k .

Определение 2.2.2. Восходящий/нисходящий луч $\mathcal{R}$ называется *критическим* для O_k , если выполняются следующие условия:

- i) Он открыт и выходит из границы ∂O_k множества O_k ;
- ii) Этот луч не свободен от O_k ;
- iii) Слева от $\mathcal{R}$ и сколь угодно близко к нему существует восходящий/нисходящий луч, свободный от O_k .

На рис. 2.2 зеленые лучи не являются критическими, потому что они не свободны от O и сколь угодно близкие слева к ним лучи также не свободны, красные лучи являются критическими, а синие лучи свободны от O и не являются критическими. Критические лучи отмечают либо передние вертикальные стороны препятствия, либо входы в его «тупиковые пещеры».¹ Эта концепция связана с идеей обхода препятствия посредством 1) постоянного следования за его границей и 2) продвижения вниз по коридору ($\dot{x} > 0$). При достижении точек, таких как А на рис. 2.2(б,в), то есть на подрисунках 2.2б, 2.2в, правило 1) включает мгновенный переход к точке В. Атрибут «критический» отмечает пещеры и вертикальные стороны, которые могут быть встречены во время такого обходного манёвра и делают его продолжение невозможным. Например, пещеры на рис. 2.2(б, в) не мешают, так как они не входят в зону

¹ *Пещера* множества O определяется как связная компонента множества точек p , таких что лучи, исходящие из p вверх и вниз, соответственно, пересекают O .

действия правила 2), в отличие от пещеры на рис. 2.2а, которая пересекается при обходе препятствия снизу и затем не может быть покинута без нарушения правила 2).

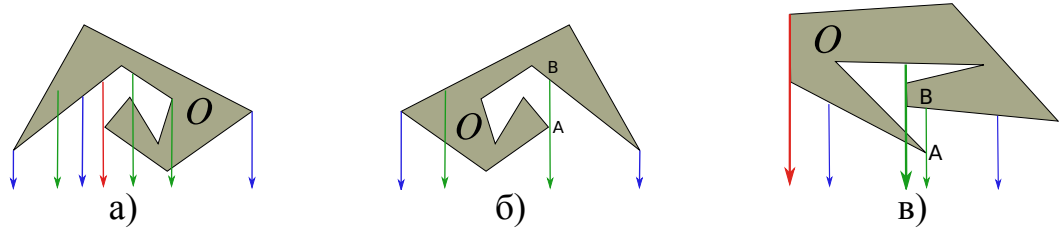


Рисунок 2.2 — Критические (красные) и некритические (другие цвета) нисходящие лучи

Предположение 2.2.3. Ни одно препятствие не имеет критических лучей.

Пример 1. Если выпуклое препятствие имеет единственную крайнюю левую точку, оно удовлетворяет предположению 2.2.3.

Пример 2. Ориентируем границу ∂O препятствия $O := O_j$ так, чтобы O находилось слева при движении по ∂O , и рассматриваем цикл C из последовательно смежных рёбер, образующих ∂O . Пусть C можно разделить на две (нециклические) цепи так, чтобы рёбра одной цепи имели острые полярные углы (меньше $\frac{\pi}{2}$ по абсолютной величине), а другой — тупые. Тогда предположение 2.2.3 выполняется.

Предположение 2.2.3 исключает препятствия, подобные тем, что на рис. 2.2(а, в). Некоторые из них могут быть включены в рамки предположения 2.2.3, если каждый робот корректирует своё восприятие сцены на лету. Некоторые намёки такого рода обсуждаются в разделе 2.5.6.

Определение 2.2.4. Точка $p \in \partial O_k$ называется (глобально) *нижней/верхней*, если p является верхним/нижним концом вертикального открытого свободного от O_k отрезка (луча). Замыкание любого множества таких точек называется (глобально) *нижним/верхним*.

Замечание 1. Нижняя/верхняя сторона многоугольника O_k не может быть вертикальной. Наоборот, любая не вертикальная сторона многоугольника O_k является либо нижней, либо верхней.

Объединение всех глобально нижних/верхних сторон O_k называется его *нижним/верхним ограждением* $F_k^\pm$; см. рис. 2.3 и подрисунки 2.3а, 2.3б, 2.3в.

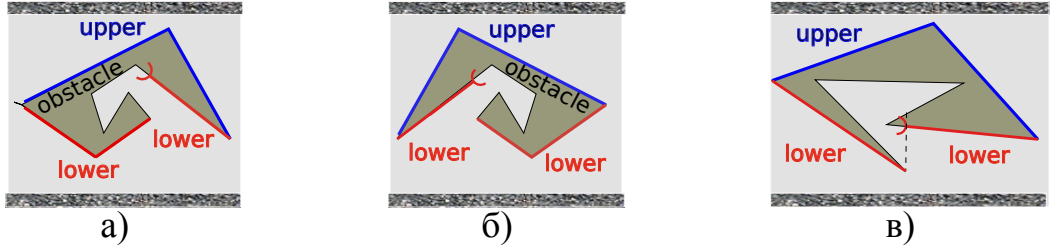


Рисунок 2.3 — Нижние и верхние ограждения

Очевидно, что абсциссы разных точек $F_k^\pm$ различны. Ориентируем нижнее/верхнее ограждение и любой его сегмент в направлении возрастания абсцисс. Тогда полярный угол любого такого сегмента является острым. «Верхняя» $\mathcal{E}^+ := \{p : y \geq w/2\}$ и «нижняя» $\mathcal{E}^- := \{p : y \leq -w/2\}$ внешние стороны коридора рассматриваются как препятствия с положительно ориентированными границами.

Окончательные предположения касаются выполнимости задачи. Во-первых, обратная связь по зазорам между роботами не должна теряться при равномерном распределении команды вдоль коридора, что приводит к $\frac{w}{N+1} \leq R_{\text{sen}}$. Во-вторых, требуемая скорость v_{des} должна соответствовать возможностям роботов: $v_{\text{des}} \leq \bar{v}$. Кроме того, тактика следования по границе может включать слежение за частями верхнего или нижнего ограждения препятствий. При этом максимальная скорость робота вдоль оси абсцисс определяется полярным углом α отслеживаемого сегмента и равна $\bar{v}|\cos \alpha|$. Следовательно, требование к значению горизонтальной скорости v_{des} обосновано только при $v_{\text{des}} \leq \bar{v}|\cos \alpha|$.

Немного усиливая эти необходимые условия через $\leq \mapsto <$ и вводя верхнюю границу $\bar{\alpha} \in (0, \frac{\pi}{2})$ на абсолютные значения полярных углов сегментов всех верхних и нижних ограждений, приходим к следующему:

$$v_{\text{des}} < \bar{v} \cos \bar{\alpha}, \quad w/(N+1) < R_{\text{sen}}. \quad (2.2)$$

2.3. Предварительная обработка сенсорных данных

Каждый робот выполняет эту задачу индивидуально на основе собственных измерений: он воображаемо изменяет видимые части препятствий и вычисляет их характеристики.

Оснащение препятствий козырьками направлено на предотвращение маловероятного, но возможного лобового столкновения с передней вершиной препятствия $p_{\min}^k$ (как на Рис. 2.4а). Для этого UGV воображаемо прикрепляет короткий горизонтальный козырёк к точке $p_{\min}^k$, как показано на Рис. 2.4б, и использует полученное *препятствие с козырьком* (рис. 2.4) при расчёте управляющего воздействия.

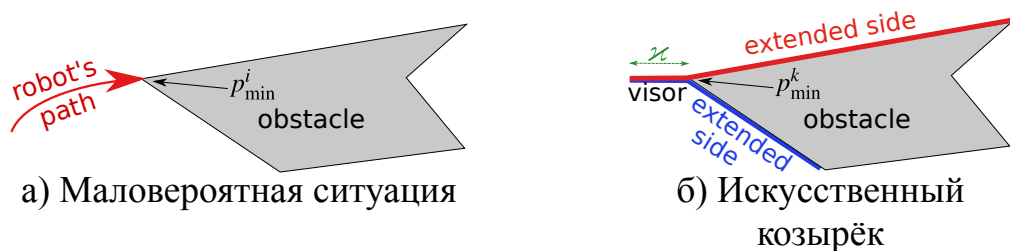


Рисунок 2.4 — Искусственный козырёк препятствия

Мотивом для этого подхода является желание полностью возложить задачу обхода препятствий на управляющий модуль, ответственный за распределение роботов по коридору, что снижает сложность системы управления. Этот модуль, следуя своей главной задаче, в основном анализирует сцену вертикально.

Козырёк позволяет UGV раньше обнаружить препятствие и начать его обход до фактического достижения области, вертикально затенённой «истинным» препятствием $\mathcal{O}$. Таким образом, UGV оказывается либо ниже, либо выше $\mathcal{O}$ к моменту фактического пересечения затенённой области, избегая лобового столкновения. Теперь перейдём к деталям.

Для любого UGV *скелетом* S называется множество видимых в данный момент частей границ препятствий. *Видимый передний выступ* — это часть S , расположенная вдоль коридора относительно UGV и представляющая собой либо А) два замкнутых отрезка, исходящих из общей точки p вниз по коридору (см. Рис. 2.5а), либо В) один замкнутый отрезок с конечной точкой p , причём UGV

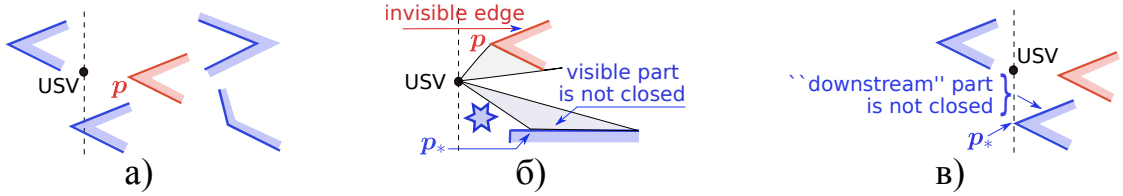


Рисунок 2.5 — Углы, которые являются (красные) и не являются (синие) видимыми передними выступами

«не видит» продолжения S на другую сторону от p (см. Рис. 2.5б); общий вид случаев дан на рис. 2.5.

Ситуация В) имеет место, если препятствие блокирует прямую видимость одной из своих сторон, прилегающих к p , в отличие от синей части на Рис. 2.5б, где блокировка вызвана другим препятствием. Это можно определить по мгновенному падению расстояния до видимой стороны вдоль луча, который непрерывно вращается вокруг робота, так что точка отражения скользит к p . Указанная синяя часть на Рис. 2.5б не является замкнутой, так как точка p_* , будучи невидимой, не входит в её состав; следовательно, по определению эта часть не является видимым передним выступом. По той же причине видимая «нижестоящая» часть на Рис. 2.5в не является видимым передним выступом, так как точка p_* не входит в неё: эта точка не расположена «вниз» от UGV и, таким образом, не принадлежит ни скелету, ни какой-либо его части.

Когда UGV обнаруживает выступы, он добавляет к каждому из них прямой горизонтальный козырёк длиной $\varkappa$, как показано на Рис. 2.4(б). Здесь $\varkappa > 0$ — свободный параметр. Если UGV оказывается точно на козырьке V , он принимает решение (случайным образом), что он либо «выше», либо «ниже» его. Несмотря ни на что, UGV придерживается этого решения, пока V остаётся видимым: даже если он окажется по другую сторону от V , он вертикально смещает козырёк в своём «воображении», чтобы оказаться на смещённом козырьке, и затем рассматривает сцену соответствующим образом.

Результаты этих манипуляций с козырьками будут прокомментированы в Замечании 3.

Дополнительные геометрические сведения. Пусть E — компактное подмножество коридора. Точка p называется *находящейся в x -проекции* множества E , если эта точка вертикально затенена множеством E :

$$\min_{r \in E} x(r) \leq x(p) \leq \max_{r \in E} x(r).$$

Если при этом $p \notin E$, то существует вертикальный отрезок (p, r) , такой что $r \in E$ и $(p, r) \cap E = \emptyset$. Если этот отрезок находится выше точки r , то точка p называется *лежащей над E* , в противном случае — *под E* . Любая точка в x -проекции E лежит либо над E , либо под E , либо одновременно над и под E . Точки p_1 и p_2 называются *разделёнными препятствием O_k* , если $p_i \notin O_k$ и $(p_1, p_2) \cap O_k \neq \emptyset$.

Процедура обработки сенсорных данных. В любой момент времени t любой UGV i строит следующие множества.

Множество $\mathcal{N}_i(t)$ видимых соседей: оно включает i и всех соседей j , таких что $\|r_j(t) - r_i(t)\| \leq R_{\text{sen}}$ и обзор j не перекрывается препятствием. Поскольку $i \in \mathcal{N}_i(t)$, число элементов $\#[\mathcal{N}_i(t)] \geq 1$.

Множество $\mathcal{N}_{i,\delta}(t) := \{j \in \mathcal{N}_i(t) : |x_i(t) - x_j(t)| \leq \delta\}$ близких соседей. Здесь $\delta > 0$ — свободный параметр.

Латерально видимая точка препятствия — это точка r из объединения $O_{\cup} := \bigcup_k O_k$ всех препятствий, такая что отрезок $(r, r_i(t))$ вертикален, не пересекает $O_{\cup}$ и имеет длину меньше R_{sen} . Такая точка может быть не более одной (и, возможно, отсутствовать) как выше, так и ниже UGV.

Множество $L_{i,\delta}(t)$ существенных латеральных точек состоит из $r_j(t), j \in \mathcal{N}_{i,\delta}(t)$ и латерально видимых точек препятствий (если таковые существуют). Пусть $L_{i,\delta}^{\pm}(t)$ обозначает множество $p \in L_{i,\delta}(t)$, таких что $\pm[y(p) - y_i(t)] \geq 0$.

Латерально свободное пространство определяется следующей формулой:

$$d_{i,\delta}^{\pm}(t) := \begin{cases} \min_{(x,y) \in L_{i,\delta}^{\pm}(t)} \pm(y - y_i) & \text{если } L_{i,\delta}^{\pm}(t) \neq \emptyset, \\ R_{\text{sen}} & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Индекс $\pm$ указывает, оценивается ли пространство над $+$ или под $-$ UGV i .

Чтобы избежать столкновений с препятствиями, требуется принимать во внимание больше характеристик сцены.

Граф $\Gamma_i(t)$ ближайших видимых соседей строится на основе произвольных (малых) параметров $\gamma_x, \gamma_y > 0$. Это неориентированный граф с множеством узлов $\mathcal{N}_i(t)$, где j и j' соединены ребром, если и только если:

- $|x_{j'}(t) - x_j(t)| \leq \gamma_x$ и $|y_{j'}(t) - y_j(t)| \leq \gamma_y$;
- Ни одно препятствие не разделяет UGV j и j' ;
- Если какой-то из них (скажем, j) находится ниже/выше козырька, ордината другого UGV j' будет меньше/ больше, чем у этого козырька, если этот UGV находится слева от UGV j .

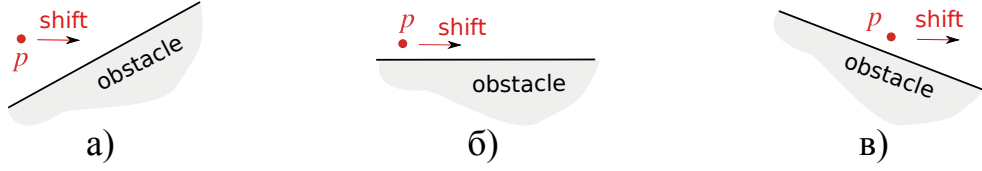


Рисунок 2.6 — (а,б) Базовая точка p и (в) небазовая точка

Прямолинейный граф $G_i(t)$ ближайших соседей представляет собой объединение отрезков $[r_j(t), r_i(t)]$ по всем j из связной компоненты графа $\Gamma_i(t)$, содержащей i .

Верхняя/нижняя база $B_i^\pm(t)$ — это множество точек $p \in G_i(t)$, обладающих следующими свойствами:

- В.1)** Вертикально ниже/выше p UGV i “определяет” препятствие O_k на расстоянии $\leq \gamma_y$;
- В.2)** Если $p = r_j(t)$, то бесконечно малый сдвиг p вдоль x -оси не увеличивает вертикальное расстояние от p до препятствий (см. рис. 2.6);
- В.3)** Если $p \in \mathcal{S} := (r_j(t), r_{j'}(t))$ для ребра в $G_i(t)$, то бесконечно малый плоскопараллельный сдвиг $\mathcal{S}$ вдоль x -оси не увеличивает вертикальное расстояние от $\mathcal{S}$ до препятствий.

UGV i называется *уклоняющимся* (*evader*), если выполняется одно из следующих условий: либо существует точка $p \in B_i^+(t)$, у которой ордината $y(p) \leq y_i(t)$, либо существует точка $p \in B_i^-(t)$, у которой ордината $y(p) \geq y_i(t)$, причём выполняется только одно из этих условий. Основной базой является база, используемая в выполняющемся случае. Понятие уклоняющегося вводится для определения ситуации, в которой UGV должен предпринять специальные меры по обходу препятствий, так как попытка двигаться прямо вперёд вдоль коридора сопряжена с риском, что либо сам UGV, либо его ближайший сосед столкнётся с препятствием, либо их связь будет разорвана препятствием.

Угол уклонения $\alpha_i(t)$ определяется так, чтобы движение под этим углом (к оси x) не создаёт угрозы столкновения с препятствиями в ближайшем будущем (см. рис. 2.7). Он определяется с использованием параметра $\alpha_* > 0$

(устанавливается позже) и обозначения $\mathcal{V}$ для объединения всех козырьков:

$$\alpha_i(t) := \begin{cases} \alpha_* \text{ если } \begin{cases} \mathbf{r}_i(t) \notin \mathcal{V}, \text{ UGV } i \text{ является уклоняющимся} \\ \text{и его основная база } B_i^+(t); \\ \text{или UGV находится на козырьке} \\ \text{и “считает,” что он выше его.} \end{cases} \\ -\alpha_* \text{ если } \begin{cases} \mathbf{r}_i(t) \notin \mathcal{V}, i \text{ является уклоняющимся} \\ \text{и его основная база } B_i^-(t); \\ \text{или UGV находится на козырьке} \\ \text{и “считает,” что он ниже его.} \end{cases} \\ 0 \text{ во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.4)$$

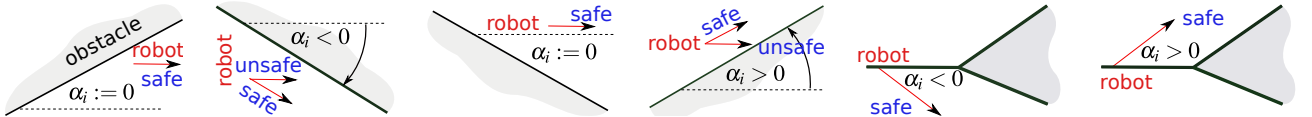


Рисунок 2.7 — Основная идея, лежащая в основе угла уклонения $\alpha_i(t)$

2.4. Алгоритм навигации

Этот алгоритм строится на основе двух функций:

$$F(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(\cdot) : [0, 2R_{\text{sen}}] \rightarrow [0, \infty). \quad (2.5)$$

Они должны быть непрерывными, кусочно непрерывно дифференцируемыми и удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} G'(L\pm) &> 0 \quad \forall L \in [0, R_G), & G(0) &= 0, \\ G(L) &= \bar{G} \quad \forall L \in [R_G, 2R_{\text{sen}}], \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$xF(x) > 0 \quad \forall x \neq 0, \quad F'(0\pm) > 0, \quad (2.7)$$

$$\bar{F} := \sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x)| < \infty, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |F'(x\pm)| < \infty. \quad (2.8)$$

Здесь $R_G \in (0, R_{\text{sen}}]$ и $\bar{G} > 0$ рассматриваются как параметры регулятора. Приведённые выше требования иллюстрируются на рис. 2.8 и функциями: $F(x) =$

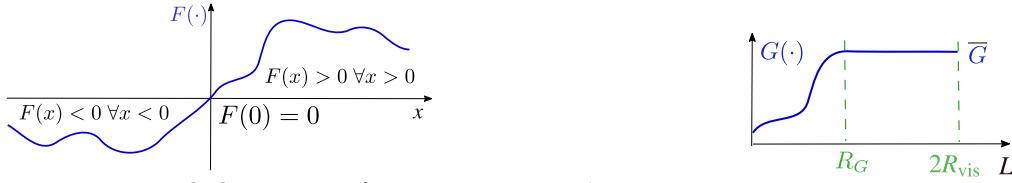


Рисунок 2.8 — Две функции, необходимые для построения закона навигации

$a\lambda_*(x/b)$, $G(L) := cL + d \forall L \in [0, R_G)$, $G(L) = cR_G + d \forall L \in [R_G, 2R_{\text{sen}}]$, где $a, b, c > 0, d \geq 0$ — параметры, а $\lambda_*(z) = \arctan(z)$, $\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$.

Правило управления. Управляющий сигнал $\mathbf{v}_i$ (то есть вектор скорости) для UGV i определяется через его абсциссу v_i^x и ординату v_i^y :

$$v_i^x(t) := v_{\text{des}} + \frac{1}{\#[\mathcal{N}_i(t)]} \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} F[x_j(t) - x_i(t)], \quad (2.9)$$

$$v_i^y(t) := G[d_{i,\delta}^+(t)] - G[d_{i,\delta}^-(t)] + P \operatorname{tg} \alpha_i(t), \quad (2.10)$$

где $P > 0$ — ещё один свободный параметр. Здесь используются только данные, доступные UGV i в данный момент.

Формула (2.9) отвечает за сбор команды на общем поперечном сечении коридора и их движение с заданной скоростью по оси x , равной v_{des} . Первые два слагаемых в правой части (2.10) отвечают за равномерное распределение UGV по ширине коридора. Последнее слагаемое учитывает возможный наклон препятствий (включая стены коридора, см. разд. 2.5.5) относительно горизонтального направления при распределении UGV по ширине прохода.

Предложенный алгоритм управления является разрывным; замкнутое решение рассматривается в смысле Филиппова [91]. Поскольку управление ограничено, решение определено для всех $t \geq 0$ [91]. Его уникальность представляет более сложный вопрос. Этот аспект не обсуждается; рассматриваются все возможные решения.

2.5. Основные результаты

2.5.1. Подготовка

Для формулировки и обсуждения основных результатов требуется ввести дополнительные обозначения и определения:

- $h(E)$ — длина проекции компактного множества E на ось x , то есть $h(E) := \max_{\mathbf{r} \in E} x(\mathbf{r}) - \min_{\mathbf{r} \in E} x(\mathbf{r})$;
- $\varphi(S) \in (-\pi/2, \pi/2)$ — полярный угол не вертикального отрезка S , ориентированного в направлении увеличения x ;
- $\{S_q^\pm\}_{q \in Q^\pm}$ — набор всех глобально верхних/нижних сторон всех O_k (см. Определение 2.2.4 и рис. 2.3).

Определение 2.5.1. Сторона S препятствия O_k называется *дружественной*, если бесконечно малое смещение в направлении x переводит любую внутреннюю точку S в свободное пространство. *Дружественная пара* — это пара соседних дружественных сторон S_1, S_2 , которые обе глобально либо верхние, либо нижние для препятствия O_k .

Сторона, изображённая на рис. 2.6(в), является дружественной, в то время как стороны на рис. 2.6(а,б) — нет. На рис. 2.7 только стороны на первой и третьей картинках дружественные. Наконец, введём следующие обозначения:

$$h_{\min} := \min \left\{ \min_{q \in Q^+} h(S_q^+); \min_{q \in Q^-} h(S_q^-) \right\}, \quad (2.11)$$

$$\hat{\alpha} := \max \left\{ \max_{q \in Q^+} \varphi(S_q^+); \max_{q \in Q^-} -\varphi(S_q^-) \right\}, \quad (2.12)$$

$$\beta_{\min} := \min_{\text{всех дружественных пар}} \min \{ |\varphi(S_1)|; |\varphi(S_2)| \}, \quad (2.13)$$

$$g_{\min} := \min_{k \neq k'} \text{dist} [O_k; O_{k'}]. \quad (2.14)$$

Здесь $\beta_{\min} := \infty$, если дружественные пары отсутствуют, и $\hat{\alpha} \in [0, \bar{\alpha}]$, где $\bar{\alpha}$ взято из (2.2). Так как все стороны $S_q^\pm$ не вертикальны (см. Замечание 1), получаем, что $h_{\min} > 0$, $\hat{\alpha} \in (0, \pi/2)$ и $\beta_{\min} > 0$.

2.5.2. Ключевой теоретический результат

Он касается $\bar{v}$ из (2.1), $\bar{\alpha}$, v_{des} , R_{sen} из (2.2), α_* из (2.4), R_G , $\bar{G}$ из (2.6), $\bar{F}$ из (2.8), P из (2.10), $\varkappa$ с рис. 2.4б, w с рис. 2.1, числа UGV N , а также параметров δ и γ_x, γ_y , определяющих величину (2.3) и $\Gamma_i(t)$ соответственно.

Теорема 2.5.2. Пусть выполнены Предп. 2.2.1, 2.2.3 и (2.2),(2.6)-(2.8), а параметры закона управления выбраны так, что выполнены следующие неравенства:

$$\bar{F} < v_{des}, \frac{w}{N+1} < R_G < R_{sen}, \gamma_x \operatorname{tg} \bar{\alpha} \leq \gamma_y, \quad (2.15)$$

$$(v_{des} + \bar{F})^2 + [\bar{G} + P \operatorname{tg} \alpha_*]^2 \leq \bar{v}^2, \quad (2.16)$$

$$(v_{des} + \bar{F}) \operatorname{tg} \hat{\alpha} + \bar{G} < P \operatorname{tg} \alpha_*, \quad (2.17)$$

$$\sqrt{\min\{N\gamma_y; R_{sen}\}^2 + \varkappa^2} < g_{\min}/2. \quad (2.18)$$

Предположим, что в начале миссии: 1. UGV находятся вне пещер препятствий; 2. UGV расположены в вертикальной полосе ширины γ , такой что:

$$\gamma < h_{\min}, \varkappa, \gamma_x, \delta, \sqrt{R_{sen}^2 - R_G^2}, \quad (2.19)$$

$$G[\gamma \operatorname{tg} \bar{\alpha}] < [v_{des} - \bar{F}] \operatorname{tg} \beta_{\min}, \quad (2.20)$$

$$\bar{G} + G[\gamma \operatorname{tg} \hat{\alpha}] < P \operatorname{tg} \alpha_*, \quad (2.21)$$

$$\sqrt{\min\{N\gamma_y; R_{sen}\}^2 + (\varkappa + \gamma)^2} < g_{\min}/2. \quad (2.22)$$

Предположим также, что изначально любые два различных UGV $i \neq j$ не разделены препятствием и имеют различные ординаты. Тогда выполняются следующие утверждения:

- i) Управляющий сигнал $v_i(t)$, генерируемый предложенным законом навигации, всегда удовлетворяет неравенству из (2.1), как и требуется;
- ii) UGV проходят область с постоянной скоростью v_{des} , как определено в Определении 2.1.1;
- iii) Разброс по оси x $\varsigma(t) := \max_{i,j} |x_i(t) - x_j(t)|$ не увеличивается с течением времени;
- iv) Любой UGV движется вдоль коридора в целевом направлении: $\dot{x}_i(t) > 0$ почти для всех t ;

- v) UGV занимают разные расстояния от стенок коридора: $y_i(t) \neq y_j(t) \forall i \neq j, t \geq 0$;
- vi) Порядок UGV в вертикальном направлении остаётся неизменным со временем.

Обсуждение ключевого теоретического результата. Благодаря (2.14), (2.18) и Предп. 2.2.1, длина выступа $\varkappa < \frac{q_{\min}}{2}$, а значит, препятствия с выступами не пересекаются, согласно (2.14).

Начальное размещение команды в вертикальной полосе соответствует целям миссии и является разумным решением. На практике это часто означает размещение всех UGV почти в одной точке; в таком случае ни одно препятствие не разделяет группу.

Все предположения о начальном расположении выполняются, если, двигаясь по свободной части коридора в почти идеальном порядке, рой сталкивается с полосой препятствий. В этот момент устанавливается время $t = 0$, и начинается рассмотрение. В данной ситуации цель состоит в прохождении полосы препятствий с сохранением структуры строя и восстановлением этого порядка после выхода из полосы.

При этом iii) в Теореме 2.5.2 гарантирует, что ранее достигнутая “точность” ς построения никогда не ухудшится, даже при прохождении полосы препятствий. Следовательно, “восстановление” касается только равномерного распределения по ширине коридора и скорости вдоль него.

Из (2.8) и (2.9) следует, что эта скорость отклоняется от желаемой v_{des} не более чем на $\bar{F}$. Это наблюдение может быть использовано для контроля ошибки скорости путём выбора соответствующей функции $F(\cdot)$.

Утверждение vi) означает, что в линейном строю как самый верхний, так и самый нижний UGV “автоматически” сохраняют свои позиции. Это может быть важно, если существуют причины использовать специальные UGV с особыми функциями (например, для исследования стен или защиты роя) в этих положениях.

Те же аргументы показывают, что предложенному закону управления не требуются дополнения в сценариях, где целесообразно держать определённые UGV скрытыми в середине роя, например, в целях их защиты.

Теорема 2.5.2 формулирует достижимые требования. Действительно, условия для R_G из (2.15) могут быть выполнены благодаря второй неравенству в

(2.2). Неравенство (2.18) можно выполнить, выбрав достаточно малые $\varkappa > 0$ и γ_y , после чего последнее неравенство в (2.15) можно обеспечить, выбрав достаточно малое $\gamma_x > 0$.

При $\bar{F} \rightarrow 0$, $\bar{G} \rightarrow 0$ первое неравенство в (2.15) становится верным, а соотношения (2.16) и (2.17) упрощаются до $\bar{v}^2 > v_{\text{des}}^2 + P^2 \text{tg}^2 \alpha_*$ и $v_{\text{des}} \text{tg} \hat{\alpha} > P \text{tg} \alpha_*$ соответственно. Система из этих двух последних неравенств имеет решение для P и α_* тогда и только тогда, когда

$$\bar{v}^2 > v_{\text{des}}^2 + v_{\text{des}}^2 \text{tg}^2 \hat{\alpha} = \frac{v_{\text{des}}^2}{\cos^2 \hat{\alpha}}, \quad (2.23)$$

что верно согласно первой формуле из (2.2), поскольку $\hat{\alpha} < \bar{\alpha}$. Следовательно, (2.15)–(2.17) можно удовлетворить, выбрав P и α_* так, чтобы $P \text{tg} \alpha_* \approx v_{\text{des}} \text{tg} \hat{\alpha}$, $P \text{tg} \alpha_* < v_{\text{des}} \text{tg} \hat{\alpha}$, а затем выбрав достаточно малые значения $\bar{F}, \bar{G} > 0$.

Остаётся выбрать функции из (2.5), удовлетворяющие условиям (2.6) и (2.7) при только что выбранных параметрах $R_G, \bar{F}, \bar{G}$.

Отметим также, что (2.19)–(2.22) описывает непустое множество значений γ согласно (2.6), (2.15), (2.17) и (2.18). Например, это множество содержит все достаточно малые γ , но не обязательно только их.

Теорема 2.5.2 остаётся справедливой, если ширина коридора w заменяется её верхней границей из (2.2) и (2.15), угол $\hat{\alpha}$ — его известной верхней границей в (2.17) и (2.21), угол $\beta_{\min}$ — его известной нижней границей в (2.20), а расстояния $h_{\min}$ и $g_{\min}$ — их нижними границами в (2.19) и (2.18), (2.22) соответственно.

Теорема 2.5.2 не ограничивает выбор параметра $\delta > 0$. Если $\delta > R_{\text{sen}}$, то δ не влияет на управление и может быть полностью проигнорирован, поскольку в этом случае $\mathcal{N}_{i,\delta}(t) = \mathcal{N}_i(t)$. Идея введения δ связана с тем, что при $\delta < R_{\text{sen}}$ множество $\mathcal{N}_{i,\delta}(t)$ может быть существенно меньше множества $\mathcal{N}_i(t)$, что снижает вычислительную нагрузку.

Если в нарушение предположений Теоремы 2.5.2 $y_i(0) = y_j(0)$ для некоторых $i \neq j$, то цель не достигается, так как $y_i(t) = y_j(t) \quad \forall t \geq 0$. (Команда действует как более малая группа, которая достигает своей цели.) Это можно исправить, немного изменив закон управления. Однако обсуждение соответствующих деталей опускается, поскольку наиболее простой подход заключается в обеспечении условия $y_i(0) \neq y_j(0) \quad \forall i \neq j$ путём корректного размещения UGV в начале миссии. Более того, это предположение выполняется с вероятностью 1, если UGV размещены в сцене в соответствии с непрерывным вероятностным распределением.

С точки зрения $z_i(t) := x_i(t) - v_{\text{des}} \cdot t$, закон управления (2.9) принимает форму нелинейного правила *ближайших соседей* [101], используемого для достижения консенсуса по значению z_i среди множества агентов:

$$\dot{z}_i = \frac{1}{\#[\mathcal{N}_i(t)]} \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} F[z_j(t) - z_i(t)]. \quad (2.24)$$

Его сходимость требует определённой связности графа информационного потока $\mathcal{G}(t)$. (Напомним, что его узлы $1, \dots, N$ ассоциированы с агентами, и узлы i и j связаны, если и только если $j \in \mathcal{N}_i(t)$.)

Большинство критериев консенсуса предполагают, что этот граф обладает некоторой формой связности по какой-либо причине, не уточняя её. Также существуют исследования алгоритмов, направленных на сохранение предполагаемой начальной связности; см., например, [59—64, 102, 103]. Эти алгоритмы обычно требуют больших вычислительных затрат и основываются на довольно полном знании сцены.

Наоборот, алгоритмы из данной работы являются вычислительно простыми, используют только локальную информацию о сцене, не основываются на постулате связности или предположении о начальной связности. Причина их сходимости заключается в доказанном факте, что рано или поздно они автоматически создают связность.

Ниже приведены дополнения к теореме 2.5.2, действующие в рамках её предположений.

Замечание 2. Через некоторое время разрывности закона управления (2.9), (2.10) устраняются.

Это исключает режим скольжения и связанные с ним эффекты.

Замечание 3. Если UGV не находится на переднем крае козырька V , то его мнение о том, находится ли он выше или ниже V , соответствует реальности (и, таким образом, UGV фактически не смещает V в своём восприятии).

Теперь рассмотрим три особых ситуации.

2.5.3. Выбывание членов команды

Предположим, что в момент времени $t = t_*$ несколько UGV покидают миссию, и остальные начинают их игнорировать. Применяя Теорему 2.5.2 для $t \geq t_*$ с особым вниманием к пунктам iii) и v) в момент времени $t = t_*$, видно, что вывод Теоремы 2.5.2 остаётся справедливым для оставшейся команды, если её размер $N_* > wR_G^{-1} - 1$. (Это сохраняет истинность второго неравенства в (2.15).) С учётом возможности $R_G \approx R_{\text{sen}}$ требование к N_* принимает форму $R_{\text{sen}} > w/(N_* + 1)$ и означает, что потеря нескольких участников не нарушает сенсорной связности команды при её равномерном распределении по коридору.

Аналогично, команда адаптируется к нескольким последовательным потерям, если окончательный размер команды остаётся больше $wR_G^{-1} - 1$.

2.5.4. Пополнение команды

Ограничимся простым, но практичным сценарием, когда дополнительные участники команды (*новички*) высаживаются рядом с некоторыми “старыми” участниками (*ветераны*). Пусть новички появляются в момент времени t_* не в “пещерах” препятствий и внутри вертикальной полосы, содержащей ветеранов, ширина которой достаточно мала γ_{add} : выполняются условия (2.19)–(2.22) с $\gamma := \gamma_{\text{add}}$ (и обновлённым размером роя в (2.22)).

Теорема 2.5.2 подразумевает, что для $t \geq t_*$ её утверждения i)–vi) (и Замечание 3) остаются справедливыми, если в момент времени $t = t_*$ ординаты новичков попарно различны и отличаются от ординат ветеранов, а препятствия не блокируют линии обзора между UGV.²

²Фактически последнее требование можно ослабить; соответствующие детали опускаются как технически сложные.

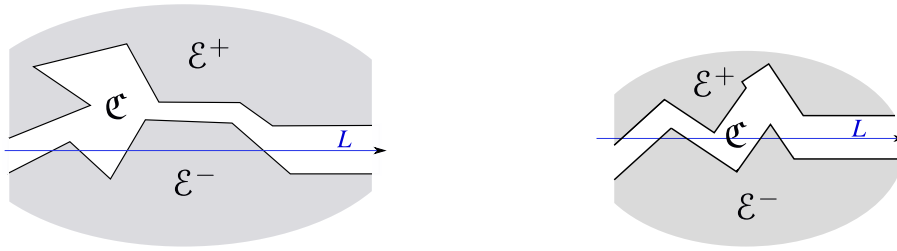


Рисунок 2.9 — Непрямые упрощённые коридоры

2.5.5. Непрямые коридоры

Вышеизложенные результаты практически дословно переносятся на более общие коридоры. Последнее предложение абзаца, следующего за Определением 2.2.4, намекает на эту возможность: поскольку верхняя и нижняя границы коридора рассматриваются как препятствия, достаточно, чтобы эти границы соответствовали сформулированным выше требованиям к препятствиям, а структура коридора делала понятия направления коридора и поперечного сечения осмысленными. Эти идеи уточняются в следующем определении. Для его формулировки напомним, что плоское множество называется *полигональным*, если его граница содержится в конечном числе прямых линий.

Определение 2.5.3. *Направленный упрощённый коридор* — это область $\mathcal{C}$, для которой существуют два полигональных множества $\mathcal{E}^+$ и $\mathcal{E}^-$ и направленная прямая L со следующими свойствами:

- i) Множества $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}^+$ и $\mathcal{E}^-$ являются просто связными и образуют разбиение $\mathbb{R}^2$;
- ii) Существуют $x_{\dagger}$ и $w > 0$, такие что в декартовой системе координат с осью абсцисс, совпадающей с L , части множеств $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}^+$ и $\mathcal{E}^-$, лежащие справа от абсциссы $x_{\dagger}$, описываются неравенствами $-w/2 \leq y \leq w/2$, $y > w/2$, $y < -w/2$ соответственно при $x \geq x_{\dagger}$;
- iii) Допущение 2.2.3 выполняется для $\mathcal{E}^+$ и $\mathcal{E}^-$.

Это определение иллюстрируется на рис. 2.9.

Замечание 4. Пусть коридор $\mathcal{C}$ является упрощённым. Предположим также, что в разделе 2.5 все утверждения и формулы (включая (2.11)–(2.14) и определение

$\bar{\alpha}$ из (2.2)), которые ссылаются на «препятствия», учитывают $\mathcal{E}^+$ и $\mathcal{E}^-$. Тогда утверждение Теоремы 2.5.2 остаётся верным.

Допущение Теоремы 2.5.2 о старте вне пещер также может быть ослаблено. Это иллюстрируется в разделе 2.6 с помощью компьютерных симуляций, без теоретического обсуждения, поскольку оно технически сложно.

2.5.6. Некоторые подходы к ослаблению Допущения 2.2.3

Допущение 2.2.3 исключает ситуации, подобные тем, что показаны на рис. 2.2а,в. Однако иногда их можно свести к случаю, где Допущение 2.2.3 выполняется. Для этого UGV могут мысленно наделять препятствия дополнительными фиктивными частями. Цена за это заключается в том, что, по мнению UGV, свободное пространство сжимается.

Ниже обозначены основные идеи двух подходов такого рода; детализация их разработки оставляется на дальнейшие исследования. Каждый из них уменьшает количество критических лучей на один. Если у препятствия много таких лучей, рекомендуется их последовательная обработка.

Добавление фиктивного выступа к вертикальной передней стороне S препятствия показано на рис. 2.10, где $\Delta > 0$ является свободным параметром, а выступ показан зелёным цветом (подрисунки 2.10а, 2.10б).

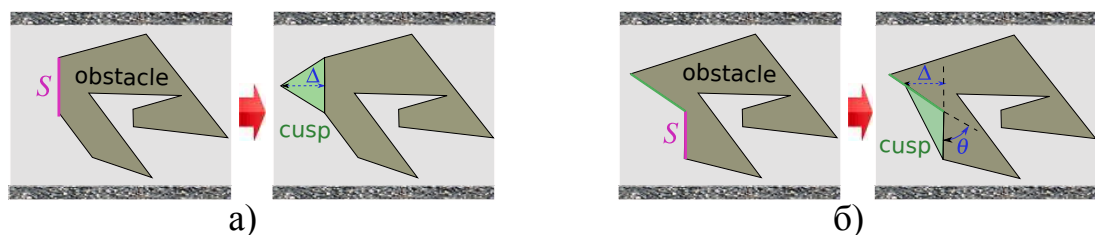


Рисунок 2.10 — Добавление фиктивного выступа спереди

Случай, когда обе стороны, примыкающие к S , идут вверх по коридору, не представляет интереса: это означает, что UGV находится в пещере, что должно было быть предотвращено свойствами сцены и алгоритмическими подсказками.

Для своевременного построения фиктивного выступа UGV должны иметь полный обзор стороны S всякий раз, когда выступ может повлиять на управление. Таким образом, длина s стороны S и значение Δ не должны быть чрезмерно большими. Также требуется, чтобы точки выступа были видимы, когда они попадают в область обнаружения R_{sen} , как она задана регулятору. Следовательно, UGV должно «видеть» не только эти точки, но и всю сторону S . Чтобы создать такую ситуацию, регулятору может быть искусственно задано значение R_{sen} , меньшее, чем фактическое.

Заполнение неприемлемых пещер показано на рис. 2.11. На рис. 2.11(а-г), то есть на подрисунках 2.11а, 2.11б, 2.11в, 2.11г, параметр $\Delta > 0$ является свободным. Рис. 2.11(г) касается случая, когда сторона препятствия, которая должна поддерживать выступ, слишком коротка, чтобы вместить его полностью, и поэтому выступ обрезается на соответствующем конце этой стороны. Горизонтальные зеркальные отображения всех рисунков из рис. 2.11 также должны быть включены в перечень иллюстраций.

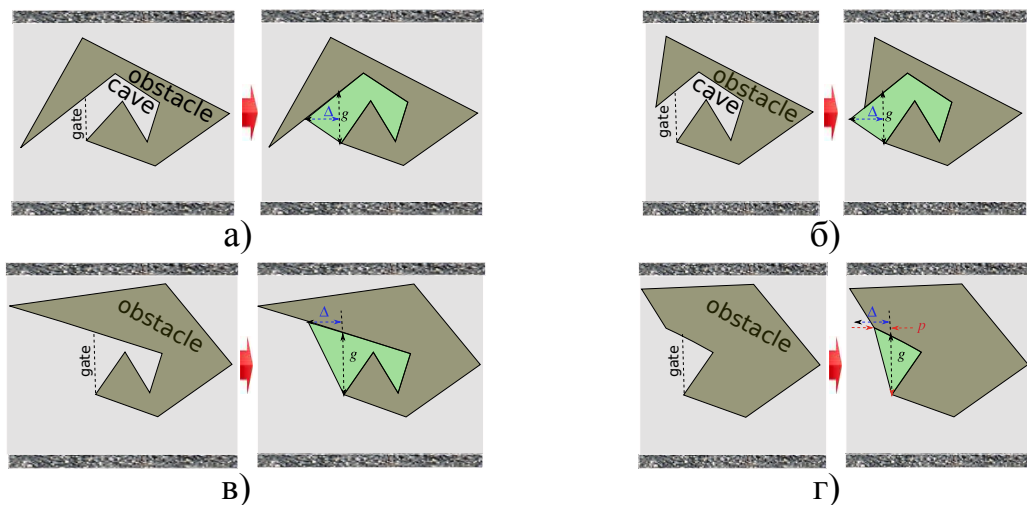


Рисунок 2.11 — Заполнение неприемлемой пещеры

2.6. Тесты компьютерного моделирования

Моделирование, описанное в данной подразделе было реализовано в jupyter notebook на языке программирования python, для визуализаций использовалась

библиотека `rugame`, для работы с векторами использовалась библиотека `numpy`. Стены коридора в симуляторе задаются функцией от горизонтальной координаты x , препятствия двумя функциями "верхней" и "нижней" гранью. Более сложные препятствия типа "пещер" как на рис. 2.12 для которых невозможно разделение на "верхнюю" и "нижнюю" грань декомпозировались на несколько "простых" подпрепятствий допускающих такое разделение, что можно видеть по "швам" на этих препятствиях (как на рис. 2.12). Дискретизация кинематической модели роботов (2.1) производилась методом Эйлера. Основной задачей представленных тестов является апробация представленного закона управления (2.9), (2.10) в кинематической модели приближенной к математической, с рассмотрением сценариев которые теоретически не предусматривались.

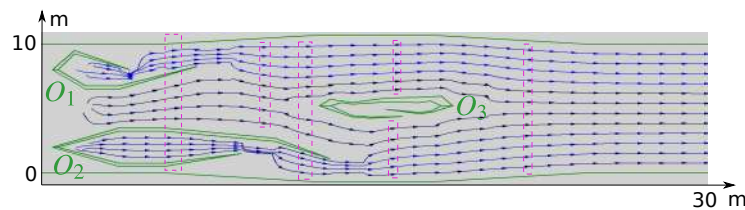


Рисунок 2.12 — Начальная расстановка: двенадцать UGV внутри пещер

Численные значения ключевых параметров, использованных в этих тестах, приведены в Таблице 2. Использовалась линейная функция $G(\cdot)$ с насыщением на пороге R_G , причём в Таблице 2 показана только её линейная часть, а также период обновления управления τ .

Параметры из Таблицы 2 не полностью соответствуют предположениям Теоремы 2.5.2; это сделано, чтобы показать, что область практической сходимости предлагаемого закона управления шире, чем теоретически установленная область притяжения.

Таблица 2 — Численные значения, использованные в тестах компьютерного моделирования

$\bar{v} = 6.0 \text{ м/с}$	$R_{\text{sen}} = 1.5 \text{ м}$	$v_{\text{des}} = 1.0 \text{ м/с}$
$P = 2.0 \text{ м/с}$	$\delta = R_{\text{sen}}/\sqrt{2}$	$\alpha_{\star} = \pi/4$
$F(x) = \frac{7.8x}{\sqrt{1+x^2}}$	$R_G = R_{\text{sen}}$	$G(d) = 0.78 \cdot d \text{ с}^{-1}$
$\gamma_x = R_{\text{sen}}/4$	$\gamma_y = R_{\text{sen}}/2$	$\tau = 20 \text{ мс}$

Измерения позиций сопровождались неравномерными аддитивными шумами, равномерно распределёнными в радиусе 0.01 м. Это довольно большая погрешность по сравнению с типичными расстояниями между UGV, равными $\approx 0.3 - 1.0$ м, наблюдавшимися в проведённых экспериментах. Например, многие современные сенсоры обеспечивают точность измерений в пределах нескольких миллиметров на таком диапазоне расстояний.

Мультимедийные материалы всех экспериментов доступны по адресу: <https://drive.google.com/drive/folders/lngTYqiYlV-2-sEI6EjcMrFmMAEF5SMWuM?usp=sharing>.

На Рис. 2.13–2.16 позиции UGV и направления их скоростей изображены треугольниками; временной шаг между кадрами равен 0.4 с. За исключением первого кадра, роботизированная команда группируется вблизи поперечного сечения коридора, что делает кадры легко узнаваемыми. Эти изображения позволяют оценить скорости UGV.

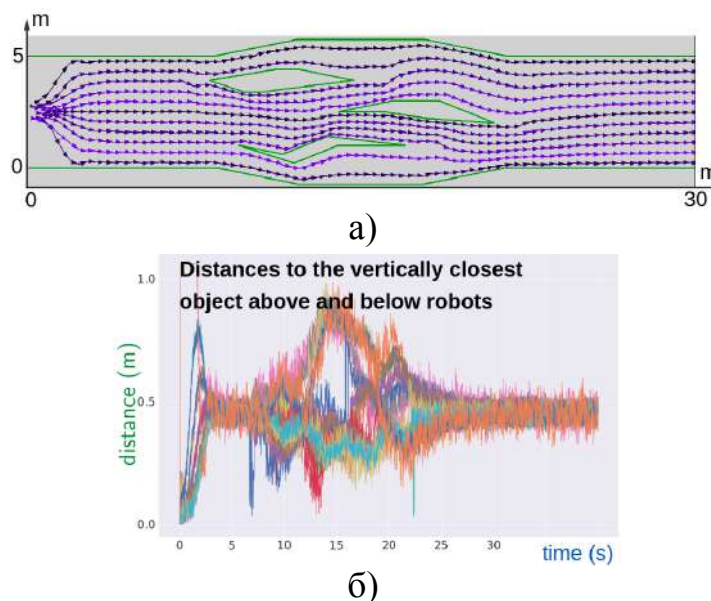


Рисунок 2.13 — Восемь UGV проходят полосу препятствий

На Рис. 2.13 восемь UGV выполняют плотное сканирование коридора с немного искривлёнными стенами и тремя препятствиями. Начиная с начального участка коридора шириной ≈ 1.5 м, команда ускоряется до желаемой скорости, выравнивается по ширине коридора и достигает равномерного само-распределения примерно за 4.0 секунды. Это распределение остаётся стабильным до приблизительно 7.0 секунд, когда UGV сталкиваются с первым препятствием.

Во время прохождения полосы препятствий UGV сохраняют своё «линейное» построение и заданную горизонтальную скорость, несмотря на то, что отдельные UGV, разделённые препятствиями, теряют прямую информацию друг о друге. Одновременно рой динамически делится на подгруппы, каждая из которых использует различные пути через препятствия.

Эксперимент, изображённый на Рис. 2.12, иллюстрирует замечание из последнего абзаца в Разделе 2.5.5: алгоритм сохраняет эффективность в ситуациях, когда UGV начинают движение внутри пещер.

Изначально двенадцать UGV распределены на три группы по четыре устройства. Две из них начинают в пещерах препятствий O_1 и O_2 соответственно, третья группа запускается между O_1 и O_2 . За ≈ 2.0 с каждая группа достигает почти идеального выравнивания по ширине коридора и приблизительно равномерного распределения по ширине используемого прохода между компонентами препятствий. Тем временем сенсорный контакт между группами блокируется препятствиями. В результате нет прогресса в сокращении x -разрывов между группами. (Эти разрывы выделены пунктирными розовыми прямоугольниками.)

На момент времени $t \approx 7.0$ с «верхняя» и «средняя» группы сливаются, и через ≈ 2.0 с они приближаются к общему движущемуся поперечному сечению коридора. Однако их выравнивание с «нижней» группой $G_{\downarrow}$ всё ещё остаётся на почти начальном уровне и остаётся неудовлетворительным. Это неудивительно, поскольку эта группа всё ещё находится вне сенсорного контакта. На момент времени $t \approx 11.0$ с объединённая «верхняя» группа разделяется на две подгруппы G_1 и G_2 , которые «решают» обойти препятствие O_3 сверху и снизу соответственно.

Изначально G_2 находится вне контакта с $G_{\downarrow}$ (сначала из-за блокирующего эффекта O_2 , затем из-за того, что разрыв между G_2 и $G_{\downarrow}$ превышает расстояние сенсирования). В течение этого периода G_1 и G_2 сохраняют почти идеальное взаимное выравнивание по ширине коридора, хотя между ними находится препятствие O_3 . Закон управления стимулирует G_2 и $G_{\downarrow}$ к уменьшению разрыва между ними. В результате они входят в контакт, и объединённая группа выравнивается по ширине коридора и достигает почти равномерного само-распределения по ширине используемого прохода к моменту времени $t \approx 13.0$ с.

Побочным эффектом этого является потеря выравнивания G_2 с G_1 . Только после того, как полоса препятствий остаётся позади (при $t \approx 19.0$ с) и разрыв между G_1 и остальной частью команды сокращается до расстояния ниже порога сенсирования (при $t \approx 21.0$ с), выравнивание всей команды и её равномерное само-распределение по ширине коридора достигаются к $t \approx 25.0$ с.

Таким образом, миссия выполнена успешно и с высокой точностью.

На рис. 2.14 представлен эксперимент, в котором 11 роботов преодолевают коридор с препятствием, движущимся поперёк коридора. Как можно видеть, через ≈ 3.0 с группа распределяется равномерно, препятствие в это время сдвигается немного вниз. В момент $t = 7.8$ с группа начинает замечать препятствие, которое к тому моменту достигает крайнего положения внизу и начинает менять направление. К 11.2 с видно, что группа разбивается на 2 подгруппы, 3 робота внизу и 8 вверху, препятствие движется уже вверх по коридору. В момент $t = 13.6$ с группа преодолевает половину препятствия, которое движется на верх "сжимая" верхнюю группу из 8 роботов. В момент $t = 19.8$ с группа заканчивает обходить препятствие и объединяется в одну. И, наконец, в момент $t = 27.2$ с группа вновь приходит к равномерному распределению вдоль коридора, достигая таким образом цели управления. Таким образом, наблюдается, что миссия выполняется и при наличии подвижных препятствий.

Два последних эксперимента проверяют способность алгоритма справляться с изменениями в составе команды. В сценарии, представленном на Рис. 2.15, команда из 11 UGV теряет 5 устройств на середине длины коридора. После этого оставшиеся 6 UGV продолжают использовать правило управления «как обычно», игнорируя отсутствие потерянных участников. Как видно на Рис. 2.15, команда успешно проходит полосу препятствий и достигает оптимального (для уменьшенной команды) самораспределения по ширине коридора.

На Рис. 2.16 показано, как 6 UGV встречаются с 5 неподвижными красными «новичками». Как только новичок обнаруживает, что UGV его обгоняет (в проекции на ось x), он начинает выполнять правило управления и, соответственно, двигаться. В момент «встречи» препятствия блокируют прямую видимость между некоторыми UGV. Как видно, это не вызывает проблем: объединённая команда рационально использует доступные проходы между препятствиями, в конечном итоге покидает полосу препятствий и достигает

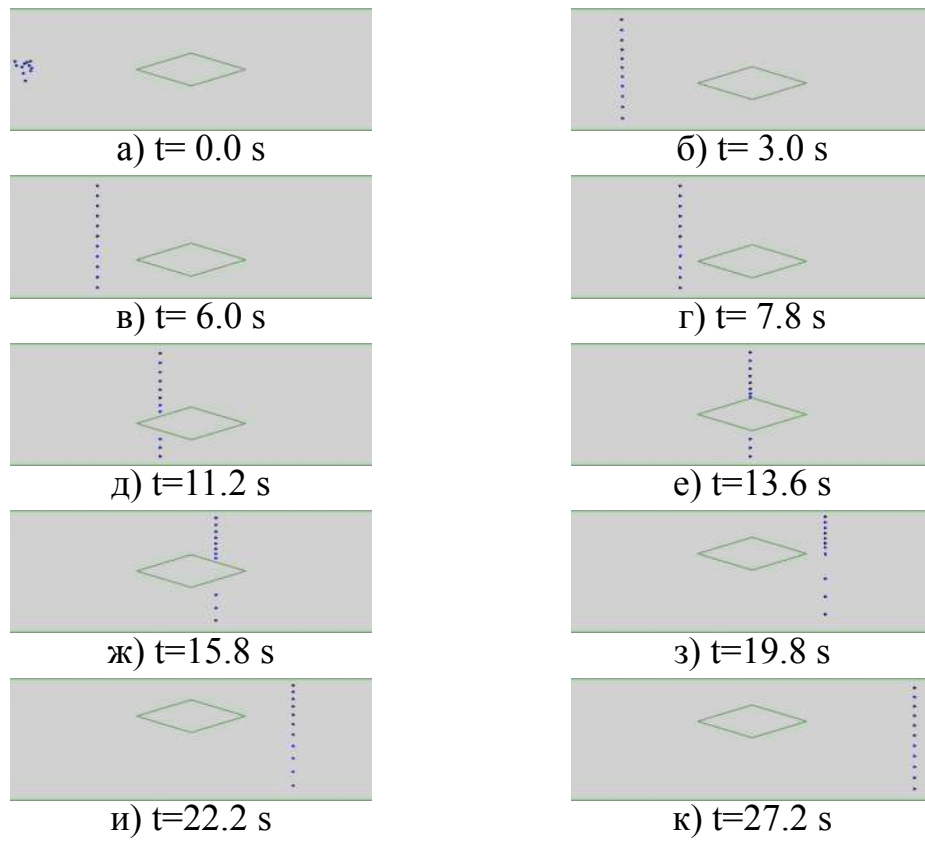


Рисунок 2.14 — 11 роботов преодолевают коридор с подвижным препятствием

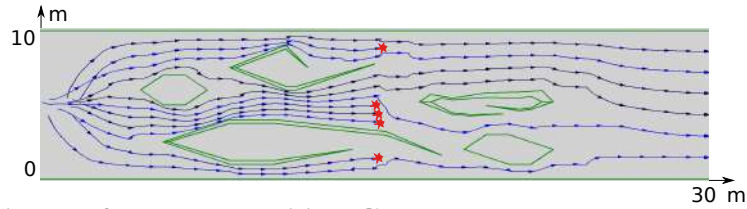


Рисунок 2.15 — Команда из 11 UGV неожиданно теряет 5 устройств

оптимального распределения по ширине коридора. Таким образом, алгоритм демонстрирует устойчивость к изменениям в составе команды.

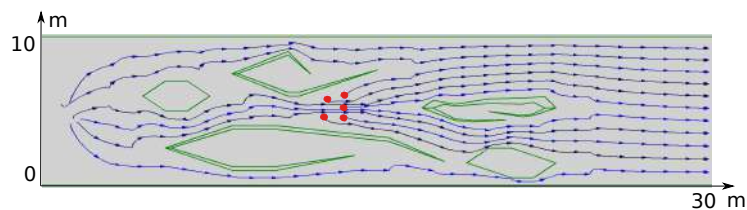


Рисунок 2.16 — Пять UGV присоединяются к команде из шести устройств

2.7. Результаты тестов на реальных физических роботах

Реальные тесты проводились с использованием двух UGV, показанных на Рис. 2.17.

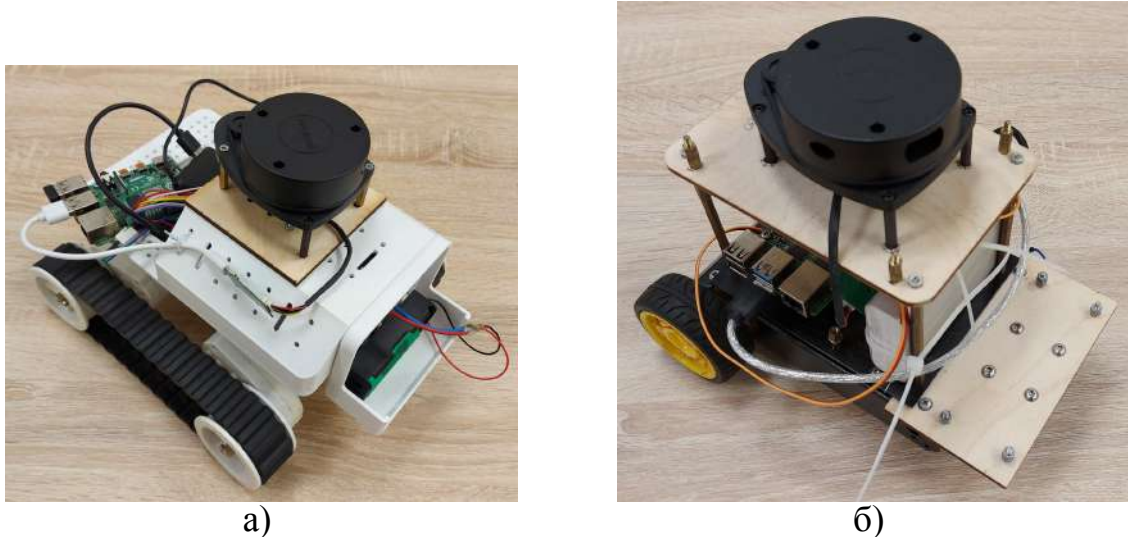


Рисунок 2.17 — Лабораторные UGV: (а) с гусеничным шасси и (б) с колёсным шасси

Устройство, показанное на Рис. 2.17(а), установлено на платформе Rover 5 UGV <https://www.sparkfun.com/products/retired/10336>; UGV на Рис. 2.17(б) схоже по архитектуре с DiffBot <https://github.com/ros-mobile-robots/diffbot>. Простые редукторы и двигатели установлены на колёсное шасси. При низком моменте сопротивления ускорение шасси в целом оказалось недостаточным, вероятно, из-за особенностей используемого простого редуктора. Это вызывает видимые проблемы с динамическими характеристиками UGV. Для компенсации данного эффекта в систему включён специальный контур управления, который при вышеуказанной ситуации искусственно увеличивает средний ток в обмотке двигателя.

Каждый UGV оснащён двумя (левым и правым) щёточными электродвигателями постоянного тока, причём двигатели различаются между устройствами. Один из них использует драйвер двигателя L298N, другой использует Motor Shield <https://amperka.com/>. Алгоритм (2.9), (2.10) реализован на борту на базе компьютера Raspberry Pi 4B+ под управлением

Linux. Двигатели управляются импульсами напряжения с максимальной амплитудой. При этом профиль скорости, сгенерированный в соответствии с (2.9) и (2.10), преобразуется в коэффициент заполнения импульсов для каждого двигателя с помощью простого низкочастотного регулятора. Таким образом, оба UGV подчиняются общему правилу управления высокого уровня, аппаратная реализация которого у них различна. В результате эксперименты отчасти проверяют устойчивость правила (2.9), (2.10) к таким различиям. Основные параметры закона управления взяты из Таблицы 2.

Каждый UGV использует измеряющий дальность сканирующий лидар Slamtec RPLidar A1. Лидар установлен на вершине UGV, чтобы избежать слепых зон. Частота обновления данных Лидара составляет 10 Гц, а контур управления двигателем работает с частотой 50 Гц. (Этот дисбаланс способствует сглаживанию траектории движения UGV.) Компьютер, двигатели и Лидар питаются от отдельных батарей. Такое разделение частично мотивировано стремлением избежать сбоев в работе Лидара из-за помех от двигателей, которые используют общий источник питания.

Управляющий софт был реализован в среде программирования Thonny на языке программирования Python. Для получения данных с лидара использовалась библиотека rpylidar, для управления моторами RPi.GPIO. Поскольку теоретическая модель кинематики простого интегратора отличается от физической модели и не учитывает ориентацию UGV по отношению к коридору в закон управления было добавлено ограничение запрещающее UGV сворачивать более чем на 45 градусов относительно целевого направления движения вдоль коридора и дополнительное слагаемое пропорциональное углу UGV со знаком относительно целевого направления мотивирующее агентов выравниваться по направлению коридора. Записи экспериментов доступны по ссылке https://drive.google.com/drive/folders/1pRoDqK7XrvCZExlk-PTmdw_nc3zVeTBt?usp=share_link.

На Рис. 2.18 показано, как UGV проходят через коридор $\mathcal{C}$ с двумя препятствиями из гофрированной белой бумаги. Их начальная расстановка отличается от желаемой. При $t \approx 4.0$ с они достигают почти равномерного распределения по ширине коридора, но не успевают выровнять свои координаты вдоль $\mathcal{C}$. Немного позже колесный UGV начинает обходить препятствие 1 справа, так что при $t \approx 10.0$ с UGV оказываются в общем проходе между препятствием 1 и правой стороной $\mathcal{C}$. При $t \approx 15.0$ с препятствие оказывается позади, UGV выстраиваются вдоль $\mathcal{C}$ и увеличивают расстояние между собой

и правой стороной $\mathfrak{C}$ для достижения равномерного распределения по ширине коридора. Этот процесс прерывается, когда линия видимости между UGV блокируется препятствием 2. Тогда UGV перестают «видеть» друг друга, и правило управления направляет каждое устройство к центру используемого прохода. Эта цель достигается с высокой точностью при $t \approx 18.0$ с. После преодоления препятствия 2 процесс выравнивания продолжается. В результате при $t \approx 32.0$ с целевая формация построена с хорошей точностью и с этого момента стабильно поддерживается.

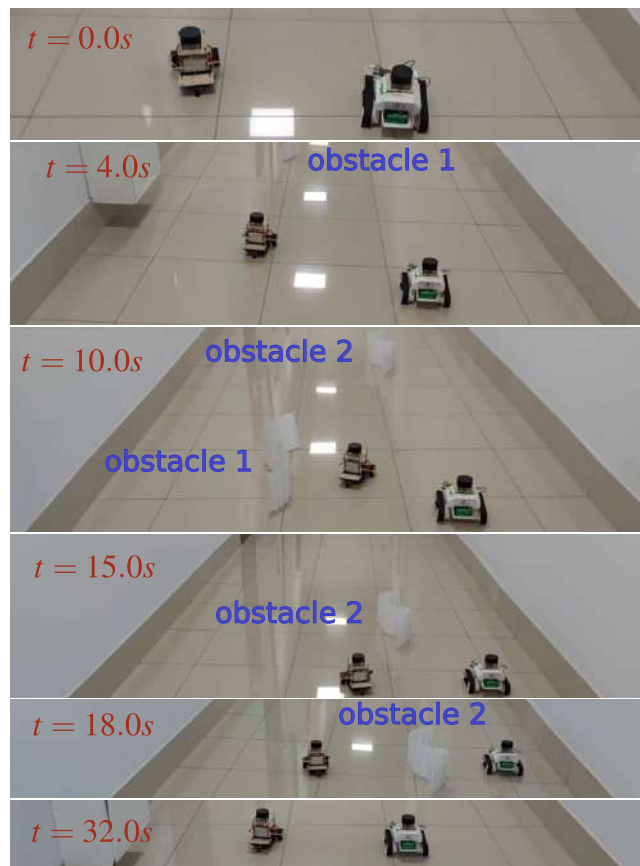


Рисунок 2.18 — Два UGV проходят через коридор с двумя препятствиями

Эти факты подтверждаются Рис. 2.19, который демонстрирует (слегка обработанные) телеметрические данные с двух Лидаров. На Рис. 2.19 синие и оранжевые графики показывают расстояние от UGV до ближайшего объекта (либо стены коридора, либо препятствия, либо другого UGV) слева и справа, найденное в узком луче, направленном перпендикулярно направлению коридора. Хотя данные частично искажены экспериментальными артефактами и кратковременными сбоями в работе системы оценки расстояний

(проявляющимися в виде коротких крупных всплесков на графиках), они подтверждают, что, во-первых, UGV не сталкиваются друг с другом, стенами коридора и препятствиями, и, во-вторых, равномерно распределяются по ширине коридора (с максимальной ошибкой позиционирования $\lesssim 4.0$ см) после преодоления полосы препятствий. Таким образом, правило управления успешно справляется с задачей и демонстрирует приемлемое качество управления.

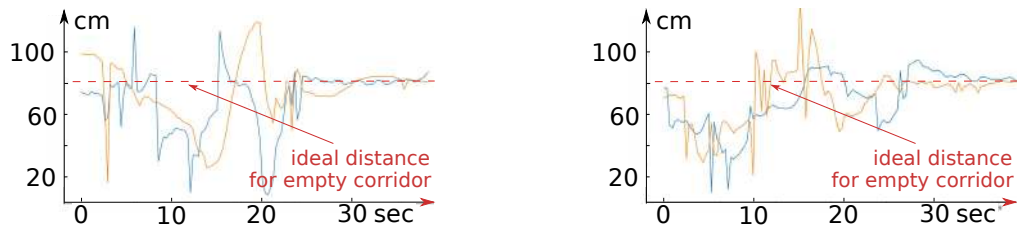


Рисунок 2.19 — Телеметрические данные для (а) гусеничного и (б) колесного UGV

В целом, эти и другие эксперименты (описанные на указанном выше сайте) продемонстрировали устойчивость предложенного закона управления к реальным неидеальностям, включая шумы датчиков, ошибки приводов и несоответствия между теоретической моделью UGV и его реальной кинематикой и динамикой.

2.8. Заключение

В главе предложено распределённое и вычислительно недорогое правило управления, позволяющее рою UGV автономно организовываться в плотнейшую сетеподобную преграду поперёк неизвестного коридора, в том числе частично загромождённого неизвестными многоугольными препятствиями. Правило обеспечивает движение преграды вдоль коридора с заданной скоростью и в заданном направлении, равномерное распределение UGV по ширине коридора в свободных от препятствий частях (после переходного процесса) и сохранение прямой поперечной формации во всех частях коридора. Используются только локальные сенсорные данные в конечной зоне видимости; наблюдения преобразуются в управление реактивно, что минимизирует вычислительную нагрузку. При определённых условиях задача обхода препятствий может быть

поручена тому же модулю, который отвечает за распределение роботов по ширине коридора. Показана устойчивость к потерям членов роя и приёму новых участников. Работоспособность обоснована строгими результатами о нелокальной сходимости и подтверждена моделированием и экспериментами на физических UGV.

Разработки главы относятся к кинематическому уровню двухуровневой архитектуры навигации и задают парадигму для последующей отработки динамических контуров слежения (см., например, [104, 105]). В следующей главе от задач коридорного покрытия выполняется переход к более абстрактным протоколам равномерного самораспределения однородных команд на прямой, служащим строительными блоками для ряда приложений, включая покрытие коридоров. Перспективы включают модели UGV более высокого порядка, ослабление предположений о препятствиях, сценарии с несколькими последовательными преградами и обобщение на трёхмерные среды.

ГЛАВА 3. Распределённые нелинейные алгоритмы построения цепных формаций полностью однородными многоагентными командами с установлением информационной связи

Актуальность

Как отмечалось во введении к диссертации, однородность роя даёт масштабируемость, отказоустойчивость и взаимозаменяемость агентов [4], но плохо совместима с схемами «лидер–ведомый», виртуальными жёсткими структурами и априорным назначением меток [12, 15, 17–19]. Многие прикладные сценарии (круиз-контроль колонны, построение виртуальной антенной решётки, поперечное распределение в коридоре) сводятся к абстрактной задаче равномерного размещения на линии или её фрагменте. Поэтому востребованы вычислительно простые общие правила, из локальных взаимодействий которых возникает согласованная формация — в духе поведенчески-ориентированного искусственного интеллекта [11, 20]; положительные исключения с гарантиями связаны, в частности, с консенсусом и родственными методами построения формаций и покрытия [3, 15, 21, 22].

Положение дел и дефициты

Задача равномерного развёртывания на (неизвестном) отрезке прямой (*Even Deployment on a Line Segment*; далее — EDLS) и родственные постановки активно изучаются, начиная с классических идей выпрямления ряда и алгоритмов типа van Loan (истоки — у Дарбу [106]); см. обзор линий [67, 107–113]; родственные протоколы на кольце — в [68, 69]. Типичны предположения об общей нумерации агентов и взаимодействиях лишь с соседями по меткам, линейные протоколы без ограничений на управление, а также постулат информационной связности с самого начала [15, 56, 57]. Между тем в робототехнике данные о партнёре часто доступны лишь в конечной зоне видимости при незаслонённом обзоре; связность может отсутствовать и даже разрушаться при разнесении

агентов [58]; ограничения на управление и запрет столкновений существенны. В области упорядочивания гибких безымянных команд [114—118] нередко допускаются неограниченные управления или разрывные законы с риском чаттеринга, а равномерность шага и учёт «заслонения» промежуточными агентами проработаны неполно. Методы виртуальных сил для покрытия [3, 48, 119] часто страдают остаточными колебаниями узлов, частичной централизацией и дефицитом строгого обоснования сходимости; подходы, блокирующие разрыв уже имеющихся связей [59—61], либо сохраняющие связность ценой тяжёлой топологической осведомлённости [62—64], для EDLS-сценариев с полезными разрывами связей малопригодны.

Новизна результатов главы

В отличие от глав 1 и 2, где поперечное распределение встроено в коридорную навигацию, здесь строятся абстрактные одномерные нелинейные протоколы непрерывного времени для полностью однородной анонимной команды неизвестного размера. Агенты не имеют средств связи, не играют различных ролей и используют лишь относительные состояния соседей в зоне видимости. Предлагаются протоколы: (а) формирования одномерной решётки с заданным шагом при достижении согласия о положении решётки и отображении агентов на её узлы; (б) равномерного распределения на неизвестном интервале, в том числе при заданной якорной точке. Протоколы учитывают ограничения на управление, исключают столкновения, допускают выбывание и добавление агентов и, для ряда постановок, обеспечивают возникновение информационной связности «из ничего» без блокировки полезных разрывов связей ценой тяжёлой топологической осведомлённости. Иллюстрации включают виртуальную антенную решётку в 3D, круиз-контроль на криволинейной дороге и сканирование коридора с учётом самосохранения; сходимость обоснована строго и дополнена моделированием.

3.1. Постановка задачи

Рассматривается система из $N \geq 2$ агентов, обозначенных от 0 до $N - 1$, оперирующая в непрерывном времени t . В каждый момент времени t каждому агенту i сопоставляется действительное число $x_i(t) \in \mathbb{R}$, называемое его *состоянием*. Агент i влияет на эволюцию своего состояния x_i , генерируя *управление* $u_i(t)$:

$$\dot{x}_i = u_i, \quad |u_i| \leq \bar{u}. \quad (3.1)$$

Здесь постоянная $\bar{u} > 0$ характеризует не только множество допустимых управлений, но и максимальную скорость изменения $|\dot{x}_i|$, при которой модель (3.1) действует. Проектирование регулятора ограничено этим пределом, что позволяет исключить обсуждение событий, происходящих при превышении этого предела или попытке его нарушения.

Агент i не знает размера команды N , но в момент времени t имеет доступ к относительным состояниям $x_j(t) - x_i(t)$ некоторых соседей j (называемых его *информаторами*); их множество обозначается как $\mathcal{J}_i(t)$, оно неизвестно и изменяется неизвестным образом. Эти данные анонимны: метка j не распознаётся.

Предположение 3.1.1. Существует постоянная $R_{\text{sen}} > 0$, такая что множество $\mathcal{J}_i(t)$ содержит, как минимум, i и всех агентов $j \neq i$, для которых $|x_i(t) - x_j(t)| < R_{\text{sen}}$, и нет агента, состояние которого лежит в открытом интервале с концами $x_i(t)$ и $x_j(t)$.

Это не исключает возможности наличия других информаторов.

Пример негативного влияния “промежуточных” агентов можно найти в цепочке роботизированных автомобилей на дороге (см. Разд. 3.4.2 для деталей), которые оценивают межавтомобильные расстояния по видеозаписям с фронтальных видеокамер. В этом случае громоздкий грузовик впереди может блокировать видимость объектов, находящихся перед ним на дороге.

Протокол — это общепринятое правило, следуя которому каждый агент индивидуально формирует своё управление на основе доступных данных. Это правило должно быть таким, чтобы для любого начального состояния $\{x_i(0)\}_{i=0}^{N-1}$

оно порождало траекторию, определённую для всех $t \geq 0$. Анонимность данных требует, чтобы любая перестановка $x_j(t)$ с $j \in \mathcal{J}_i(t)$ не влияла на результат $u_i(t)$.

Протоколы, обладающие следующими свойствами, представляют интерес.

Определение 3.1.2. Говорят, что агенты достигают:

- 1) *Равномерного самораспределения с шагом $w \geq 0$* (см. Рис. 3.1(a)), если существует x_* и такая нумерация агентов, что $x_i(t) \rightarrow x_* + iw$ при $t \rightarrow \infty$ для всех $i \in [0 : N - 1]$;
- 2) *Равномерного самораспределения с (заданным) шагом w и заданной опорной точкой x_+* , если 1) выполняется с $x_* := x_+ + w$;
- 3) *Равномерного самораспределения внутри интервала $[x_-, x_+]$* (см. Рис. 3.1(б)), если при $t \rightarrow \infty$ состояния $x_i(t)$ стремятся к N различным точкам, которые делят $[x_-, x_+]$ на равные по длине интервалы.



Рисунок 3.1 — Распределение (a) с шагом w (b) внутри интервала

При $w = 0$ пункты 1) и 2) означают достижение консенсуса. Теоретически задача равномерного распределения ниже опорной точки сводится к пункту 2) в Определении 3.1.2 через замену переменных $x_i \mapsto -x_i$, $u_i \mapsto -u_i$, $x_+ \mapsto -x_+$.

Замечание 5. В основном предполагается, что агент не различает своих соседей и опорную/(граничную) точку, они обрабатываются одинаково. Поэтому предположение 3.1.1 распространяется и на этих “фиктивных” агентов.

Комментарии к противоположному случаю даны в Разд. 3.3.

Завершаем раздел несколькими определениями. Пусть $\Gamma(t)$ — неориентированный граф с множеством узлов $[0 : N - 1]$, где i и j соединены ребром тогда и только тогда, когда $i \neq j$, $|x_i(t) - x_j(t)| < R_{\text{sen}}$, и состояние ни одного агента не лежит между $x_i(t)$ и $x_j(t)$.

Определение 3.1.3. Последовательность $\{x_i\}_{i=0}^{N-1}$ называется:

- *Связной*, если соответствующий граф Γ является связным;

- *Без столкновений*, если $x_i \neq x_j \forall i \neq j$, и $x_i > x_+ \forall i$ в случае пункта **2)** Определения 3.1.2, а также $x_- < x_i < x_+ \forall i$ в случае пункта **3).**

Протокол называется:

- а)** *Не сталкивающим*, если состояние остаётся без столкновений для всех $t \geq 0$, если оно было таковым в начальный момент;
- б)** *Сохраняющим ближайших соседей*, если граф $\Gamma(t)$ не теряет рёбер, когда начальное состояние без столкновений.

Свойства, описанные в пунктах **а)** и **б)**, должны соблюдаться при применении рассматриваемого протокола; пункт **а)** часто интерпретируется как отсутствие столкновений в реальной жизни.

В исследованиях, посвящённых управлению формацией, для рассмотрения информационной связности обычно вводится граф $\Gamma_{\text{all}}(t)$ с множеством узлов $[0 : N - 1]$, где от каждого информатора $j \in \mathcal{J}_i(t)$ к агенту i ведёт ребро. В данном случае используется его подграф $\Gamma(t)$, который сам по себе ослабляет ограничения на потерю связей [59—64].

Для протокола и начального состояния, свободных от столкновений, выполняется $x_i(t) \neq x_j(t) \forall t \geq 0, i \neq j$. Следовательно, агентов можно перенумеровать так, чтобы:

$$x_0(t) < x_1(t) < \dots < x_{N-1}(t) \quad \forall t. \quad (3.2)$$

Свойства, введённые в Определении 3.1.2, трудно достижимы, если информационная связность команды нарушается в целевом состоянии. Это мотивирует формулировку следующих требований для случаев **1), 2)** и **3)** из Определения 3.1.2:

$$w < R_{\text{sen}}, \quad (x_+ - x_-)/(N + 1) < R_{\text{sen}}. \quad (3.3)$$

3.2. Равномерное самораспределение с заданным шагом

Для построения протоколов выберем гладкую функцию $\Xi(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, такую, что

$$\Xi'(d) > 0, \Xi(d) \in [0, \bar{u}] \quad \forall d \in [0, R_{\text{sen}}), \Xi(0) = 0. \quad (3.4)$$

Примеры включают $\Xi(d) = d\bar{u}/R_{\text{sen}}$, $\Xi(d) = \frac{2\bar{u}}{\pi} \arctan d$.

Цель — достичь **1**) из Определения 3.1.2. Обозначим $\Delta x_{i,j} := x_j - x_i$.

Протокол 1: В момент времени t агент i выполняет следующее:

s.1) Находит множество *ближайших верхних/нижних информаторов*

$$\mathcal{J}_i^\pm(t) := \{j \in \mathcal{J}_i(t) : R_{\text{sen}} > \pm \Delta x_{i,j}(t) > 0\};^1 \quad (3.5)$$

s.2) Определяет длину разрыва для каждого из этих двух множеств, если они не пусты, и принимает w в качестве длины разрыва в противном случае:

$$d_i^\pm(t) := \begin{cases} \min_{j \in \mathcal{J}_i^\pm(t)} |\Delta x_{i,j}(t)| & \text{если } \mathcal{J}_i^\pm(t) \neq \emptyset, \\ w & \text{иначе;} \end{cases} \quad (3.6)$$

s.3) Вычисляет текущее управляющее воздействие:

$$u_i(t) := \Xi[d_i^+(t)] - \Xi[d_i^-(t)]. \quad (3.7)$$

Управление (3.7) удовлетворяет неравенству в (3.1) благодаря (3.4). Согласно (3.7), агент i управляется через взаимодействие двух слагаемых в (3.7), которые стремятся уменьшить разрыв (определенный в **s.2**)) соответственно сверху и снизу относительно агента. Другое правило отражено в (3.4): чем шире разрыв, тем больше усилие для его сокращения.

Замечание 6. Протокол удовлетворяет условию анонимности данных, так как переупорядочение агентов не влияет на величины (3.6), а значит, и на управление (3.7).

Разрывности в управлении означают, что в замкнутом контуре состояние $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=0}^{N-1}$ подчиняется ОДУ $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ с разрывной правой частью. Его решение рассматривается в смысле Филиппова [120]. Так как управления ограничены, $k := \sup_{\mathbf{x}} \|f(\mathbf{x})\| < \infty$, а значит, решение определено для всех $t \geq 0$. Действительно, верхняя граница k тривиально распространяется на конвексификацию ОДУ Филиппова [120, разд. 4]. Таким образом, по [120, теор. 1, разд. 7], решение определено по крайней мере для $t \in [0, \min\{a, b/m\}]$, где $a, b > 0$ — произвольные константы, такие что цилиндр $Z(t_0 \leq t \leq t_0 + a, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}(0)\| \leq b)$

¹Здесь и далее формула с символами $\pm$ или $\mp$ (или оба) на самом деле включает две формулы: они получаются при выборе верхнего знака во всех вхождениях этих символов, и наоборот.

лежит в области определения ОДУ и его выпуклой оболочки, а m — верхняя граница последнего на Z . В частности, можно взять $m := k$ для любых a, b . Остается допустить, что $a \rightarrow \infty$ и $b \rightarrow \infty$, что возможно, так как эта область включает все t, x .

Теорема 3.2.1. Пусть выполняются предположение 3.1.1, (3.4) и первая часть (3.3). Тогда для Протокола 1 справедливы следующие утверждения:

- i) Он избегает столкновений и сохраняет ближайших соседей.
- ii) Пусть начальное состояние связное.
 - а) Если оно без столкновений или $w = 0$, агенты достигают равномерного самораспределения с шагом w ;
 - б) Утверждение (а) справедливо даже если агент j исчезает в момент времени t так, что любой оставшийся агент i сохраняет соседа $k \neq i$ с $|\Delta x_{i,k}(t)| < R_{sen}$ и $\text{sgn } \Delta x_{i,k}(t) = \text{sgn } \Delta x_{i,j}(t)$;
 - в) Если $w = 0$ и учтён якорь $x_{\dagger}$ (см. Зам. 5), то $x_i(t) \rightarrow x_{\dagger} \forall i$ при $t \rightarrow \infty$.
- iii) Если $w = 0$, то $\max_i x_i(t)$ и $\max_i -x_i(t)$ не увеличиваются, независимо от того, используется якорь или нет.

Доказательство этой теоремы приведено в Прил. В.1.

Замечание 7. Пусть в условиях ii.a) Теоремы 3.2.1, дополнительные агенты присоединяются к команде в процессе её работы. Пусть в момент появления состояние любого «новичка» отличается от состояний всех остальных агентов. Тогда объединённая команда всё ещё достигает равномерного самораспределения с шагом w .

Это обосновывается последовательным сдвигом начала отсчёта времени к этим моментам и применением Теоремы 3.2.1.

3.3. Равномерное самораспределение от заданной якорной точки и в пределах заданного интервала

Протокол 2 представляет собой небольшую модификацию Протокола 1 и используется в случае, если задана якорная точка $x_{\dagger}$.

Протокол 2: В момент времени t агент i выполняет следующие действия:

- 1) Выполняет шаг **s.1**), где x_+ (если находится в зоне видимости) рассматривается как состояние «фиктивного» агента j_* и обрабатывается соответствующим образом;
- 2) Находит $d_i^+(t)$ по формуле (3.6) без изменений;
- 3) Находит $d_i^-(t)$ по формуле (3.6), где w заменяется на R_{sen} ;
- 4) Выполняет шаг **s.3**).

При выполнении шагов 2) и 3) j_* не игнорируется, если $j_* \in \mathcal{J}_i^\pm(t)$.

Теорема 3.3.1. Пусть выполнены предположение 3.1.1, (3.4) и первая часть условия (3.3). Тогда для Протокола 2 верно утверждение **i**) из Теоремы 3.2.1. Предположим, что начальное состояние без столкновений. Тогда агенты достигают равномерного саморазмещения с шагом w и якорной точкой x_+ . Это утверждение остаётся верным, даже если команда один или несколько раз теряет участников.

Доказательства Теорем 3.3.1 и 3.3.2 приведены в Приложении В.1.

Если агенты способны отличать якорь от других участников, в отличие от вышеизложенного, небольшая корректировка Протокола 2 обеспечивает, что разрыв между любыми соседними агентами стремится к w , а разрыв между «нижним» из них и якорной точкой стремится к другому заданному значению $w_{an} > 0$. Анализ Приложения В.1 показывает, что для достижения этой цели любой агент должен масштабировать расстояние до якоря, умножая его на $\frac{w}{w_{an}}$ при выполнении протокола. Для обеспечения сходимости первая часть условия (3.3) должна быть дополнена условием $w_{an} < R_{sen}$.

Протокол 3 используется для достижения цели **3**) из Определения 3.1.2 и требует меньшего изменения в Протоколе 1. Единственное отличие состоит в том, что, как и в **1**), любой агент рассматривает x_+ и x_- (если они видимы) как состояния «фиктивных» агентов и обрабатывает их соответствующим образом.

Теорема 3.3.2. Пусть выполнены предположение 3.1.1, (3.4) и вторая часть условия (3.3), а w таково, что $\frac{x_+ - x_-}{N+1} < w < R_{sen}$. Тогда верно утверждение **i**) из Теоремы 3.2.1. Если начальное состояние без столкновений, то агенты достигают равномерного саморазмещения в пределах интервала $[x_-, x_+]$. Этот вывод остаётся справедливым, даже если команда теряет участников, но нижние и верхние ограничения на w , наложенные в этой теореме, остаются верными для уменьшенного состава команды.

Такой выбор w возможен благодаря второй части условия (3.3).

Для выполнения протокола не требуется знание длины интервала $l := x_+ - x_-$ и размера команды N . Для настройки достаточно знать два ограничения $l \leq l_+, N \geq N_-$ и выбрать w так, чтобы выполнялось $l_+/N_- < w < R_{\text{sen}}$. Это возможно, если $l_+/N_- < R_{\text{sen}}$, что означает, что в рамках доступной информации не существует случаев, когда цель недостижима из-за потери видимости агентами при желаемом размещении.

Если агенты могут отличать концы интервала $x_{\pm}$ от других участников, то, как и в случае с Теоремой 3.3.1, масштабирование расстояний до x_- и x_+ при выполнении Протокола 3 приводит к тому, что разрыв между любыми соседними агентами стремится к w , а разрыв между $x_{\pm}$ и ближайшим агентом — к другому заданному значению w_{end} .

Утверждения Теорем 3.3.1, 3.3.2 остаются верными, даже если изначально некоторые разрывы между агентами превышают R_{sen} , и графы видимости $\Gamma_{\text{all}}(0)$ и $\Gamma(0)$ оказываются несвязанными.² Протоколы 2 и 3 не требуют начальной связности, так как в итоге они её обеспечивают (что следует из условия (3.3), предположения 3.1.1 и Теорем 3.3.1, 3.3.2). Утверждения замечаний 6 и аналог замечания 7 также верны для Протоколов 2 и 3.

Поскольку Теоремы 3.2.1–3.3.2 не накладывают ограничений на $\bar{u} > 0$ в (3.1), протоколы успешно работают, используя сколь угодно малые управляющие сигналы.

3.4. Иллюстративные примеры

Хотя агенты и оснащены индексами в тексте, ни один агент не знает своего собственного индекса и индексов товарищей, и они являются анонимными.

²Для Теоремы 3.3.1 все такие разрывы могут быть сколь угодно большими, а графы $\Gamma_{\text{all}}(0)$ и $\Gamma(0)$ могут быть полностью несвязными. Для Теоремы 3.3.2 разрывы ограничены сверху длиной интервала l .

3.4.1. Построение виртуальной антенной решётки в 3D

Рой из N мобильных роботов оперирует в 3D выше горизонтальной плоскости H (см. рис. 3.2(a)). Каждый из них оснащён передатчиком. Необходимо вертикально выстроить всех роботов над (или под) заданной точкой p так, чтобы расстояние между соседними роботами было равно ϖ , а высота самого нижнего из них была равна $h_{\dagger}$, где $\varpi > 0$ и $h_{\dagger} > 0$ заданы.

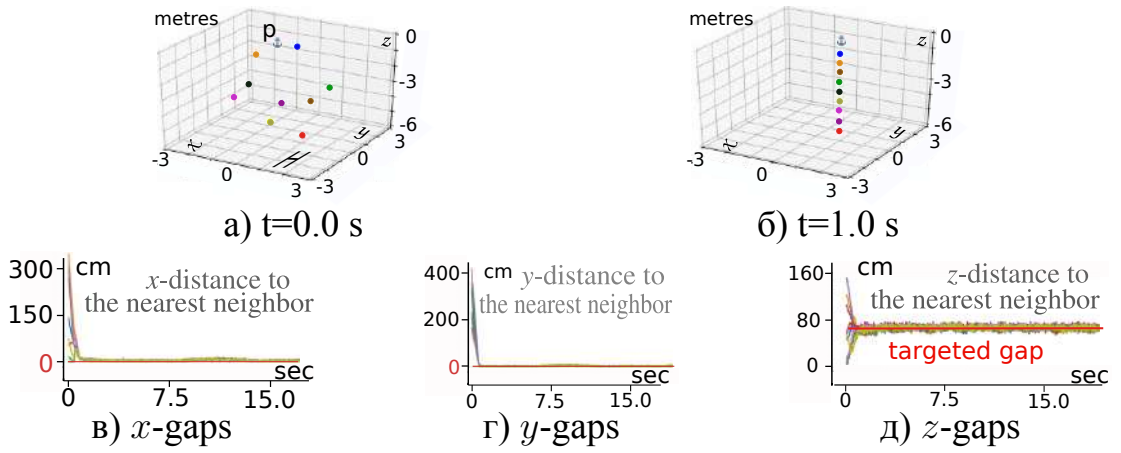


Рисунок 3.2 — Виртуальная антенная решетка в 3D ниже маяка $\mathfrak{p}$

Пусть $\mathcal{F}$ — декартова система координат x, y, z , расположенная в точке p , при этом ось z направлена вертикально вверх. В своей локальной системе координат любой робот i имеет доступ к ориентациям осей системы $\mathcal{F}$ и относительному положению «маяка» p и любого партнера, если прямой обзор к нему не прегражден и он находится в пределах чувствительности на расстоянии $R_{\text{sen}} > 0$. В целевой конфигурации любой робот находится в сенсорном контакте с ближайшим партнером, а самый низкий из них — с H , то есть $R_{\text{sen}} > \varpi$ и $R_{\text{sen}} > h_{\dagger}$.

Предположим, что роботы описаны следующим образом:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i, \quad \|\mathbf{v}_i\| \leq \bar{v}. \quad (3.8)$$

Здесь $\mathbf{r}_i(t) \in \mathbb{R}^3$ — местоположение робота i , скорость $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i(t)$ — управление, а максимальная скорость $\bar{v}$ задана.

«Распределим» $\bar{v}$ и R_{sen} среди осей $\mathcal{F}$, выбирая константы $\bar{v}_b, R_b > 0$ для $b = x, y, z$ так, чтобы $\sum_b \bar{v}_b^2 \leq \bar{v}^2$ и $\sum_b R_b^2 \leq R_{\text{sen}}^2$. Поскольку $R_{\text{sen}} > \varpi$ и $R_{\text{sen}} > h_{\dagger}$,

это можно сделать так, чтобы $R_z > \varpi$ и $R_z > h_{\dagger}$. Для $b = x, y, z$ также выбираем функцию Ξ_b , которая отображает $[0, \infty)$ в $[0, \bar{v}_b]$ и выполняет (3.4) с $R_{\text{sen}} := R_b$.

Протокол 4: В момент времени t агент i выполняет следующее:

1) Для $b := x, y$ применяет Протокол 1 с $\Xi := \Xi_b, w := 0$ и $R_{\text{sen}} := R_b$ к относительным координатам $b_j(t) - b_i(t)$ всех видимых объектов j (включая p , если применимо) для формирования $v_i^b(t)$;

2) Применяет Протокол 2 с $\Xi(\cdot) := \Xi_z(\cdot), R_{\text{sen}} := R_z$, якорем $h_{\dagger} - \varpi$, и шагом $w := \varpi$ к относительным координатам $z_j(t) - z_i(t)$ этих объектов для формирования $v_i^z(t)$;

3) Принимает $\mathbf{v}_i(t) := [v_i^x(t); v_i^y(t); v_i^z(t)]$ в (3.8).

Неравенство из (3.8) выполняется, поскольку по (3.4) и (3.7),

$$\|\mathbf{v}_i\|^2 = \sum_b (v_i^b)^2 \leq \sum_b \bar{v}_b^2 = \bar{v}^2. \quad (3.9)$$

Предложение 3.4.1. Пусть роботы изначально находятся на различных высотах $z_i(0) > h_{\dagger} - \varpi$ и $|\chi_i(0)| < R_x/2, |y_i(0)| < R_y/2$. Тогда роботы не столкнутся с H и друг с другом, и они выстроятся над p : по мере того как $t \rightarrow \infty$, их проекции на H сходятся к p , а $z_i(t) \rightarrow h_{\dagger} + i\varpi \forall i$ при правильной нумерации роботов.

Доказательство. Вводится $\mathbf{r}_{-1}(t)$ с $\chi_{-1}(t) = y_{-1}(t) = 0, z_{-1}(t) = h_{\dagger} - \varpi$. По iii) теоремы 3.2.1, $|\chi_i(t)| < R_x/2, |y_i(t)| < R_y/2 \forall t \geq 0, i$, и поэтому, когда $j \neq i$, имеем

$$|z_j(t) - z_i(t)| < R_z \Rightarrow \|\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)\| < R_{\text{sen}} \Rightarrow j \in \mathcal{I}_i(t), \quad (3.10)$$

то есть выполнение предположения 3.1.1 для $x_i := z_i, R_{\text{sen}} := R_z$. По теореме 3.3.1 и определениям 3.1.2, 3.1.3, $z_i(t) \neq z_j(t) \forall i \neq j, t \geq 0$, и роботы не сталкиваются друг с другом и с H . Также $\{\chi_i(t)\}$ и $\{y_i(t)\}$ не разрываются, и выполняется предположение 3.1.1 с $R_{\text{sen}} := R_x$ и $R_{\text{sen}} := R_y$, соответственно. Сдвигая начало отсчета времени на t_* и используя ii.b) теоремы 3.2.1 (с $x_{\dagger} := 0$), видно, что $\chi_i(t) \rightarrow 0, y_i(t) \rightarrow 0 \forall i$, что завершает доказательство. $\square$

В предположении 3.4.1 начальные расстояния между роботами вдоль оси z могут быть произвольно большими, так что граф информационной связности $\Gamma_{\text{all}}(0)$ не имеет рёбер.

Рис. 3.2 показывает результаты компьютерного симуляционного теста. В нем $N = 9, \varpi = h_{\dagger} = 0.7$ м, $\Xi_b(d) = 4.0d$ ($b = x, y, z$), $\bar{v} = 4.0$ м/с, измерения имеют добавочный шум, независимо одинаково равномерно распределенный от

–5.0 до 5.0 см, управление обновляется каждые 20 мс. Маяк $\ddagger$ движется по горизонтали по окружности с диаметром 3.0 м, антенна строится не над, а под $\ddagger$, и $R_{\text{sen}} = 1.0$ м вдоль оси z , в то время как $R_{\text{sen}} = 10.0$ м вдоль других осей. Изначально команда состоит из двух кластеров (три верхних робота, включая $\ddagger$, против других), которые невидимы друг для друга.

Рис. 3.2 показывает, что Протокол 4 выравнивает роботов под маяком и равномерно распределяет их с хорошей точностью уже через ≈ 1.0 с, после чего стабильно поддерживает требуемую 3D конфигурацию с ошибкой в позиционировании $\lesssim 6.0$ см (сравнимо с ошибками сенсоров). Таким образом, алгоритм справляется с задачей, несмотря на начальную разрывность графа информационной связности и постоянное перемещение маяка.

Подробные и расширенные результаты этого теста доступны по ссылке <https://drive.google.com/drive/folders/1PNzhTJDlyrqvx2BgiisFGDTdq0InUU0?usp=sharing>

3.4.2. Распределённый алгоритм круиз контроля

Команда из N роботизированных транспортных средств движется по извилистой дороге одно за другим. Рекомендуется одинаковая скорость $v_{\text{des}} \geq 0$ и расстояние w между роботами. Каждое транспортное средство i стабилизировано поперёк дороги, и его положение полностью характеризуется расстоянием вдоль дороги y_i от опорной точки (см. рис. 3.3(a)). Роботы не используют средства связи. Датчики обеспечивают каждого робота информацией о расстоянии вдоль дороги, по крайней мере, до ближайшего транспортного средства как впереди, так и позади, если они существуют, и расстояние не превышает определенное значение R_{sen} . Необходимо общее правило управления, которое каждый транспорт выполняет отдельно и независимо, позволяющее колонне автономно достигать желаемой скорости и расстояния. Дорога настолько узкая, что обгон не возможен.

Робот i описывается уравнением $\dot{y}_i = u_i, |u_i| \leq \bar{v}$, где скорость движения по дороге u_i является управляющим воздействием, а $\bar{v} > v_{\text{des}}$ задано. Предполагается, что транспортные средства не теряют сенсорный контакт, когда находятся близко к целевому межтранспортному расстоянию $w < R_{\text{sen}}$.

Используем Протокол 1, где (3.7) заменяется на $u_i(t) = v_{\text{des}} + \Xi[d_i^+(t)] - \Xi[d_i^-(t)]$, $\bar{u} := \bar{v} - v_{\text{des}}$ в (3.4), и в (3.5) множество $\mathcal{S}_i(t)$ содержит транспортные

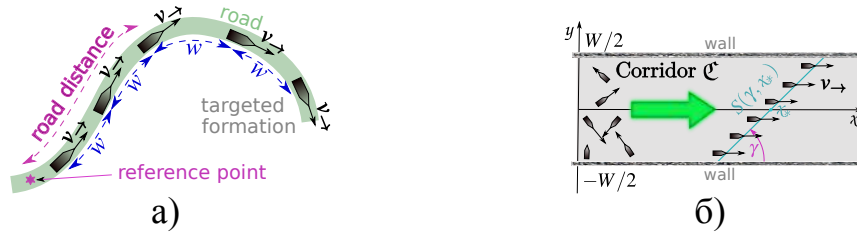


Рисунок 3.3 — (а) Транспортные средства на дороге; (б) Очистка коридора

средства, о которых i -й робот получает данные. Применяя Теорему 3.2.1 к $x_i(t) := y_i(t) - v_{\text{des}}t$, видно, что если изначально **a)** положения транспортных средств различны и **b)** расстояния вдоль дороги между соседними транспортными средствами меньше R_{sen} , то эти расстояния стремятся к w при $t \rightarrow \infty$ и никогда не превышают R_{sen} , роботы не обгоняют друг друга, а их скорости стремятся к v_{des} (так как $d_i^{\pm}(t) \rightarrow w \Rightarrow u_i(t) \rightarrow v_{\text{des}} + \Xi[w] - \Xi[w] = v_{\text{des}}$).

Это остается верным, даже если **b)** не выполнено и транспортное средство, которое изначально находится позади всех, всегда управляется с $u = v_{\text{des}}$, а Протокол 2 используется для остальных. Тогда применяется Теорема 3.3.1, постоянное значение переменной x , связанной с последним транспортным средством, трактуется как «якорь», а другие транспортные средства как «агенты».

Соответствующие результаты компьютерных симуляций размещены по следующей ссылке

<https://drive.google.com/drive/folders/1PNzhTJDlyrqvx2BgiisFGDTdq0InUUs0?usp=sharing>

Подобный сценарий рассмотрен в [114], где дополнительно решается задача управления транспортными средствами типа «Дубинс-автомобиль» для движения по дороге, где достижение заданной скорости не требуется, и используется дискретный регулятор (т.е. бесконечные ускорения) для распределения транспортных средств по дороге. Регулятор же из данного раздела в конечном итоге обеспечивает заданную скорость и использует конечные, вплоть до произвольно малых, ускорения (если $\Xi'(\cdot) \approx 0$ в (3.4)).

3.4.3. Многоагентное сканирование коридорных зон с учетом требований самосохранения

Рой из N мобильных роботов работает в плоском *коридоре* $\mathcal{C}$ между двумя параллельными линиями (называемыми *стенами*). Роботы должны совместно обнаружить все объекты, находящиеся в $\mathcal{C}$. Каждый объект статичен и обнаруживается любым роботом на расстоянии $\leq R_{\text{det}}$. Роботы могут быть повреждены в ходе выполнения задачи; всякий раз, когда это происходит, любой робот, находящийся на расстоянии $\leq R_{\text{dan}}$ от события, находится в опасности.

Площадь $\mathcal{C}$ настолько велика, что статическое размещение не создает ситуации, при которой какая-либо точка $\mathcal{C}$ будет обнаружена кем-либо. Поэтому необходимо перемещение команды для того, чтобы рано или поздно обнаружить любой объект. Например, интересует распределенный закон управления, который обеспечивает движение со следующими свойствами (см. рис. 3.3(б)):

- t.1)** Роботы движутся вдоль $\mathcal{C}$ с заданной скоростью $v_{\text{des}} > 0$;
- t.2)** Они не сталкиваются друг с другом и со стенами;
- t.3)** Рой выстраивается в наиболее плотную сеть вдоль движущегося прямого сегмента $S(t)$, который соединяет стены и составляет с ними постоянный угол $\gamma \in (0, \pi/2]$.

Здесь γ измеряется против часовой стрелки от желаемого направления движения, а **t.2)** игнорирует скрытые объекты, поскольку, например, роботы двигаются над ними или наоборот, должны столкнуться с ними.

Предполагаем, что миссия выполнима, т.е. расположение из **t.3)** позволяет обнаружить все объекты, при этом обеспечивается сенсорный контакт и безопасный зазор между любыми соседними роботами:

$$W/N < 2R_{\text{det}}, \quad R_{\text{sen}} > W/(N \sin \gamma) > R_{\text{dan}}, \quad (3.11)$$

где W — ширина коридора. Такой угол $\gamma \in (0, \frac{\pi}{2}]$ существует тогда и только тогда, когда $R_{\text{sen}} > R_{\text{dan}}$. Каждый робот не использует системы связи, не знает N и W , воспринимает товарищей как анонимных, но распознает стены. В своей локальной системе координат он имеет доступ к направлению коридора и относительному положению (по крайней мере) любого партнера в пределах прямой видимости и стены в пределах сенсора на расстоянии $R_{\text{sen}} > 0$.

Роботы описываются уравнением (3.8) (где $\bar{v} > v_{\text{des}}$), и используется система координат χ, y , для которой стены заданы уравнением $|y| = W/2$, а ось χ направлена вдоль желаемого направления движения. Также вводится дополнительная координата

$$z := -\chi \sin \gamma + y \cos \gamma \quad (3.12)$$

координаты робота $\mathbf{r}_i(t)$ обозначаются как $\chi_i(t), y_i(t), z_i(t)$. Исходя из (3.11), выбираются $\delta, R_x, R_y, w_y > 0$ так, чтобы

$$2\delta \leq \bar{v} - v_{\text{des}}, \frac{R_y + R_x}{\sin \gamma} < R_{\text{sen}}, \frac{W}{N} < w_y < R_y. \quad (3.13)$$

Для $b = x, y$ выбирается отображение $d \geq 0 \mapsto \Xi_b(d) \in [0, \delta]$, которое удовлетворяет (3.4) с $R_{\text{sen}} := R_b$.

Протокол 5: В момент времени t агент i выполняет следующие действия:

1. Применяет Протокол 3 к $x_i(t) := y_i(t), x_{\pm} := \pm W/2, \Xi := \Xi_y, R_{\text{sen}} := R_y, w := w_y$ и расстояние до стен, масштабированное на 2; результат обозначается как $v_{i,y}$.
2. Применяет Протокол 1 к $x_i(t) := z_i(t), R_{\text{sen}} := R_x, w := 0, \Xi := \Xi_x$; результат обозначается как $v_{i,x}$.
3. Формирует текущий контроль, используя систему отсчета $\mathcal{F}$:

$$\mathbf{v}_i(t) := v_{i,y} \begin{bmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{bmatrix} + [v_{i,x} + v_{\text{des}}] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Тогда выполняется неравенство из (3.8), поскольку по (3.7) и (3.4),

$$\|\mathbf{v}_i\| \leq |v_{i,y}| + |v_{i,x}| + v_{\text{des}} \leq 2\delta + v_{\text{des}} \stackrel{(3.13)}{\leq} \bar{v}.$$

Пусть $S(\gamma, \chi_*)$ обозначает сегмент, который соединяет стены под углом γ и проходит через точку $(\chi_*, 0)$.

Предложение 3.4.2. Пусть изначально роботы размещены внутри коридора $|y_i(0)| < W/2$, так что $|z_i(0) - z_j(0)| < R_x$ и $y_i(0) \neq y_j(0) \forall i \neq j$. Тогда цель достигается:

- i) Утверждение **1.2)** верно;
- ii) Роботы могут быть пронумерованы так, что $y_i(t) \rightarrow -W/2 + \Delta/2 + i\Delta \forall i$ при $t \rightarrow \infty$, где $\Delta := W/N$;
- iii) Существует χ_* , такое что расстояние от любого робота до сегмента $S(\gamma, \chi_* + v_{\text{des}}t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство. Положим $\zeta_i(t) := z_i(t) + v_{\text{des}}t \sin \gamma$. Из (3.14),

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= v_{i,y} \sin \gamma, \quad \dot{\zeta}_i \stackrel{(3.12)}{=} -\dot{x}_i \sin \gamma + \dot{y}_i \cos \gamma + v_{\text{des}} \sin \gamma \\ &= -[v_{i,y} \cos \gamma + v_{i,x} + v_{\text{des}}] \sin \gamma + v_{i,y} \sin \gamma \cos \gamma \\ &\quad + v_{\text{des}} \sin \gamma = v_{i,x} \sin \gamma. \end{aligned}$$

Теперь $\mathcal{J}_i(t) = \{j \neq i : \|\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)\| < R_{\text{sen}}\}$ и

$$\chi^2 + y^2 \stackrel{(3.12)}{=} \frac{y^2 + z^2 - 2yz \cos \gamma}{\sin^2 \gamma} \leq \frac{(|y| + |z|)^2}{\sin^2 \gamma}. \quad (3.15)$$

Поскольку $\zeta_j - \zeta_i = z_j - z_i$, выход $v_{i,x}$ в пункте 2) Протокола 5 является результатом применения Протокола 1 к ζ_k . Следовательно, по **iii)** Теореме 3.2.1, $R_x > |\zeta_j(t) - \zeta_i(t)| = |z_j(t) - z_i(t)| \forall t \geq 0, j, i$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |y_i(t) - y_j(t)| < R_y &\Rightarrow \|\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)\|^2 \\ &\stackrel{(3.15)}{\leq} \frac{(R_y + R_x)^2}{\sin^2 \gamma} \stackrel{(3.13)}{<} R_{\text{sen}}^2 \Rightarrow j \in \mathcal{J}_i(t). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Следовательно, выполняется предположение 3.1.1 (с $R_{\text{sen}} := R_y$) для $y_i(t)$.

Применяя Теорему 3.3.2 (с комментариями о масштабировании расстояний) к этим данным, доказывается **i)** и **ii)**. Таким образом, существует t_* , такое что для $t \geq t_*$ и всех i , зазор $y_{i+1}(t) - y_i(t) \approx W/N < R_y$ по (3.13). По (3.16), $i+1 \in \mathcal{J}_i(t)$. Следовательно, цепочка $\{\zeta_i(t)\}$ не разрывается, и предположение 3.1.1 с $R_{\text{sen}} := R_x$ выполняется по мере её эволюции. После сдвига нулевого момента времени на t_* , **ii.a)** Теоремы 3.2.1 показывает, что существует ζ_* , такое что $\zeta_i(t) = z_i(t) + v_{\text{des}}t \sin \gamma \rightarrow \zeta_* \forall i$ при $t \rightarrow \infty$. Остаётся заметить, что по (3.12), $|\zeta_i(t) - \zeta_*|$ — это расстояние до прямой $L(t)$, описываемое уравнением $z = \zeta_* - v_{\text{des}}t \sin \gamma$, которая содержит сегмент $S(\gamma, x_* + v_{\text{des}}t)$ с $x_* := -\zeta_*/\sin \gamma$. $\square$

Предположение 3.4.2 (почти наверняка) выполняются, если роботы изначально размещены практически в одном месте (что является практичным) и согласно непрерывному распределению вероятностей. предположение 3.4.2 допускает, что граф $\Gamma(0)$ может быть разрывным.

Результаты компьютерных симуляций можно найти по ссылке:

<https://drive.google.com/drive/folders/1PNzhTJDlyrqvx2BgjisFGDTdq0InUU0?usp=sharing>

3.5. Заключение

В главе предложены распределённые непрерывные по времени вычислительно дешёвые нелинейные правила управления, равномерно распределяющие команду по узлам однородной решётки с заданным шагом и по заданному либо неизвестному интервалу. Эффективность алгоритмов обоснована теоремами глобальной сходимости и подтверждена моделированием. Протоколы применимы к полностью однородным анонимным командам с ограниченной зоной видимости, учитывают ограничения на управление и исключают столкновения; отдельно исследовано установление информационной связности в ходе работы алгоритма. Иллюстративные приложения включают круиз-контроль колонны транспортных средств, навигацию роев для плотного покрытия коридоров и построение виртуальной антенной решётки в 3D.

Модель простого интегратора служит полезным первым приближением и основой для ряда методов более высокого порядка. В следующей главе рассматриваются задачи статического покрытия сложных двумерных областей методами виртуальных сил в условиях отсутствия GPS. Перспективы включают обобщение на более сложные модели агентов, гарантию заданного безопасного зазора между состояниями и построение двумерных формаций с помощью криволинейных координат.

ГЛАВА 4. Распределённые алгоритмы для самораспределения роботизированных сетей по неизвестным сложным областям в условиях отсутствия GPS

Актуальность

В отличие от заметающего покрытия коридоров (главы 1, 2) и одномерных протоколов цепных формаций (глава 3), многие миссии требуют *статического* самораспределения однородного роя по неизвестной сложной двумерной области — возможно, с препятствиями, — с последующей остановкой узлов. Типичны мониторинг и наблюдение окружающей среды [121—123], развёртывание ad-hoc сенсорных или связных сетей [3, 124, 125], поисково-спасательные и подводные операции [126], обнаружение и локализация целей [127], мониторинг здоровья [128], обнаружение лесных пожаров [129], задачи точного земледелия [130] и смежные применения; обзоры роевой робототехники — в [4, 14]. Ограниченность ресурсов каждого узла и дальности действия делает критичным размещение в целесообразных позициях; при недоступности или опасности сцены естественно сенсорное саморазвёртывание из компактной зоны высадки. Особый практический интерес представляют среды без GPS и локальной системы позиционирования (*Local Positioning System*; далее — LPS), без средств связи между роботами и без априорной карты области.

Положение дел и дефициты

Обзор и таксономия алгоритмов самораспределения мобильных сенсорных сетей обширны [52, 65, 66, 131, 132]. Выделяются метаэвристики (рой частиц, муравьиные и пчелиные алгоритмы и др.) [133—141], физикомиметические методы на идеях потенциальных полей и виртуальных сил [47, 142—146], а также геометрические подходы (тесселяция Вороного, общие сетки и клеточные разбиения) [50, 147—153]. В условиях отсутствия глобального

позиционирования и связи методы, опирающиеся на заранее согласованную глобальную геометрическую структуру, затруднены: требуется распределённое согласование структуры и координация этапов её построения и использования. Среди оставшихся детерминированных схем на основе виртуальных сил нет общепризнанного лидера; строгий завершённый анализ сходимости часто недоступен, поэтому выбор алгоритма опирается на моделирование и эксперимент. Недостаёт согласованного многокритериального сравнения при единых сценах и метриках, особенно с акцентом на процент и равномерность покрытия в сложных областях с препятствиями [153—156]; в сравнительный анализ главы включены, в частности, методы [119, 157—160].

Новизна результатов главы

Рассматривается однородный рой: роботы не знают размера команды, не различают друг друга, не используют связь для самораспределения и управляются общим правилом; доступны относительные положения объектов (включая границу и препятствия) в конечной зоне чувствительности и общее направление. Предлагаются два алгоритма класса методов виртуальных сил — секторальный (SA) и непрерывный секторальный (CSA). Вводится метрика равномерности покрытия области и проводится сравнительный анализ семи методов по комплексу показателей. Цель — выявить алгоритмы, обеспечивающие лучшие процент и равномерность покрытия в сложных сценах при сохранении вычислительной простоты и работы в непрерывном времени.

4.1. Постановка задачи

Группа из N точечных мобильных роботов действует на плоскости $\mathbb{R}^2$. Позиция робота i обозначается как $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^2$. Если не указано иное, предполагается, что роботы обладают кинематикой непрерывного интегратора:

$$\dot{\mathbf{r}}_i(t) = \mathbf{u}_i(t) \quad \forall t \geq 0, i = 1, \dots, N, \quad (4.1)$$

где $u_i(t)$ — управляющий сигнал, вычисляемый роботом i в момент времени t .

Каждый робот i имеет свою *зону мониторинга* M_i : робот i может обнаруживать объекты в M_i и определять их относительные позиции. Эта зона представляет собой диск с центром в $\mathbf{r}_i$ и радиусом R_{sen} . Роботы являются *анонимными* друг для друга (не различают сородичей).

Команда должна распределиться в пространстве так, чтобы каждая точка *целевой области* $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ (априори неизвестной) находилась в зоне мониторинга как минимум одного робота. Требуется разработать правило управления, которое при локальном выполнении каждым роботом обеспечивает достижение этой цели с последующей остановкой всех роботов. Любой робот способен обнаруживать границу $\mathcal{R}$ в пределах своей зоны мониторинга; изначально все роботы находятся внутри $\mathcal{R}$.

На практике возможны сценарии, где робот i влияет на близкие объекты или взаимодействует с ними, и требуется, чтобы каждая точка $\mathcal{R}$ была охвачена таким влиянием/взаимодействием. В данной модели предполагается, что расстояния мониторинга, влияния и коммуникации (если применимо) равны; в противном случае они искусственно сокращаются до минимального перед использованием обсуждаемых алгоритмов.

Далее используются следующие обозначения:

- $|E|$ — количество элементов (*размер*) конечного множества E ;
- $\|\cdot\|, \langle \cdot; \cdot \rangle$ — стандартная норма и скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$;
- $S(E)$ — площадь измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^2$;
- s — количество равных по углу секторов S_i^k в M_i ;
- $\oplus, \ominus$ — сложение и вычитание по модулю s ;
- $\vec{e}(\alpha)$ — единичный вектор с полярным углом α ;
- $\mathfrak{C}_i := \{\mathbf{p} : \|\mathbf{p} - \mathbf{r}_i\| = R_{\text{sen}}\}$ — окружность, ограничивающая M_i ;
- $\vec{s}_k := \vec{e}[2\pi k/s]$ — единичный вектор вдоль луча, разделяющего секторы S_i^k и $S_i^{k\ominus 1}$;
- $\vec{m}_k = R_{\text{sen}} \vec{e}[\frac{2\pi k + \pi}{s}]$ — вектор, биссектриса сектора S_i^k ;
- $\mathbf{t}_i^k := \mathbf{r}_i + \vec{m}_k$ — так называемая *вершина* сектора S_i^k ;
- $\text{sec}_i(\mathbf{p})$ — индекс k сектора S_i^k , содержащего точку $\mathbf{p} \in M_i$.

Если точка $\mathbf{p}$ лежит на границе двух секторов, $\text{sec}_i(\mathbf{p})$ соответствует индексу сектора против часовой стрелки.

4.2. Предлагаемые алгоритмы

Предполагается, что роботы имеют доступ к общему направлению (напр., с помощью компаса). Каждый робот i использует это направление как ось x для построения правой декартовой системы $\mathcal{F}_i$ с началом в r_i . Также робот i делит свою зону мониторинга на s равных угловых секторов $S_i^0, \dots, S_i^{s-1}$ с вершиной в r_i , нумеруемых против часовой стрелки (рис. 4.1a, $s = 6$; общий вид см. на рис. 4.1). Параметр $s = 3, 4, \dots$ общий для всех роботов, а сектор S_i^0 ограничен по часовой стрелке осью x .



Рисунок 4.1 — (a) Зона M_i и система $\mathcal{F}_i$; (б) Построение полу-отражений

Алгоритмы используют два параметра:

- $C > 0$ — коэффициент усиления контура управления;
- $s \geq 3$ — количество секторов.

4.2.1. Секторальный алгоритм (SA)

В каждый момент времени $t \geq 0$ робот i выполняет следующие действия:

s.1) Определяет позиции видимых роботов (*cocedei*):

$$\mathcal{N}_i := \{r_j : 0 < \|r_j - r_i\| \leq R_{\text{sen}}\}; \quad (4.2)$$

s.2) Распределяет $\mathcal{N}_i$ по *секторным бинам* $B_i^0, \dots, B_i^{s-1}$:

$$B_i^k = \{r_j : r_j \in \mathcal{N}_i \text{ и } \text{sec}_i(r_j) = k\}; \quad (4.3)$$

- s.3)** Если бин B_i^k пуст, создаёт фиктивного робота в *вершине* t_i^k сектора S_i^k и добавляет t_i^k в B_i^k ;
- s.4)** Выбирает ближайшего соседа в каждом бине:

$$p_i^k = \arg \min_{p \in B_i^k} \|p - r_i\| \quad (4.4)$$

и вычисляет его относительную позицию: $n_i^k := p_i^k - r_i$;

- s.5)** Находит среднее расстояние до ближайших соседей:

$$\mathcal{D}_i := s^{-1} \sum_{k=0}^{s-1} \|n_i^k\|; \quad (4.5)$$

- s.6)** Вычисляет управляющий сигнал:

$$u_i := C \cdot \sum_{k=0}^{s-1} \frac{n_i^k}{\|n_i^k\|} \cdot \frac{\|n_i^k\| - \mathcal{D}_i}{\mathcal{D}_i}. \quad (4.6)$$

Если на шаге s.4) обнаружено несколько ближайших соседей, робот выбирает вариант, непрерывно зависящий от времени, или случайный выбор при невозможности.

В (4.6) единичный вектор $\frac{n_i^k}{\|n_i^k\|}$ направлен к ближайшему соседу в секторе S_i^k . Каждое k -е слагаемое «притягивает» робота к соседу или «отталкивает» от него, в зависимости от превышения расстояния над средним значением $\mathcal{D}_i$. «Сила» пропорциональна относительному отклонению расстояния от среднего. Результат усредняется по всем бинам.

4.2.2. Непрерывный секторальный алгоритм (CSA)

Алгоритм SA использует разрывное правило управления. Это может (но не обязательно) приводить к нежелательным последствиям: дребезгу в потенциальных режимах скользящего управления и чрезмерной активности в контуре управления.

Алгоритм CSA модифицирует SA для снижения потерь непрерывности. Как будет показано, данная модификация не только достигает поставленной цели, но и приносит дополнительные преимущества. Однако цена за это — умеренное

увеличение вычислительной сложности. На практике рекомендуется заменять **SA** на **CSA** только в случае подтвержденной критичности указанных проблем.

Следующие события могут вызывать скачкообразные изменения управляющего сигнала при выполнении **SA** :

- ✧ Выход соседей из зоны мониторинга;
- ✧ Перемещение соседей между секторами;
- ✧ Смена статуса ближайшего соседа в пределах одного бина с мгновенным изменением его направления.

Меры по подавлению скачков включают:

- Дополнение каждого робота двумя *отражениями* относительно граничных лучей текущего сектора;
- Введение концепции *тени* точки, эволюционирующей непрерывно при скачках исходной точки;
- Замена множества соседей (4.2) на множество их теней и теней отражений;
- Замена истинного ближайшего соседа (4.4) на непрерывно изменяемый аналог.

Детали реализации:

$$\text{sec}_i^+(p) := \text{sec}_i(p) \oplus 1, \quad \text{sec}_i^-(p) := \text{sec}_i(p) \ominus 1.$$

Построение *отражений* точки $p \in M_i, p \neq r_i$. Идентифицируется сектор $S_i(p) := S_i^{\text{sec}_i(p)}$, после чего выполняются шаги (рис. 4.1(б)):

Шаг 1: Вычисление расстояний $D^\pm$ от точки p до граничных лучей $S_i(p)$:

$$\begin{aligned} D^+ &:= \min_{\varsigma \geq 0} \|\mathbf{r}_i + \varsigma \vec{s}_{\text{sec}^+(p)} - \mathbf{p}\| \\ &= \sqrt{\|\mathbf{p} - \mathbf{r}_i\|^2 - \langle \vec{s}_{\text{sec}^+(p)}; \mathbf{p} - \mathbf{r}_i \rangle^2}, \\ D^- &:= \sqrt{\|\mathbf{p} - \mathbf{r}_i\|^2 - \langle \vec{s}_{\text{sec}(p)}; \mathbf{p} - \mathbf{r}_i \rangle^2}; \end{aligned}$$

Шаг 2: Преобразование в относительные величины: $\theta^\pm := \frac{D^\pm}{D^+ + D^-} \geq 0, \theta^- + \theta^+ = 1$;

Шаг 3: Построение радиус-векторов *полуотражений* через выпуклую

комбинацию биссектрисы и граничных векторов:

$$\begin{aligned}\tilde{R}_i^+(\mathbf{p}) &= \theta^+ \cdot \vec{m}_{\text{sec}^+(p)} + \theta^- \cdot \vec{\zeta}^+, \\ \tilde{R}_i^-(\mathbf{p}) &= \theta^- \cdot \vec{m}_{\text{sec}^-(p)} + \theta^+ \cdot \vec{\zeta}^-, \quad \text{где} \\ \vec{\zeta}^+ &:= \|\mathbf{p} - \mathbf{r}_i\| \cdot \vec{s}_{\text{sec}^+(p)}, \quad \vec{\zeta}^- := \|\mathbf{p} - \mathbf{r}_i\| \cdot \vec{s}_{\text{sec}^-(p)};\end{aligned}$$

Шаг 4: Вычисление двух *отражений* точки:

$$R_i^\pm(\mathbf{p}) = \mathbf{r}_i + \frac{\tilde{R}_i^\pm}{\|\tilde{R}_i^\pm\|} \cdot \max \left\{ \|\mathbf{p} - \mathbf{r}_i\|, \|\tilde{R}_i^\pm\| \right\}. \quad (4.7)$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения:

Замечание 8. При перемещении точки $\mathbf{p} \neq \mathbf{r}_i$ внутри сектора S_i^k её отражение $R_i^+(\mathbf{p})$ движется в смежном полусекторе $S_i^{k \oplus 1}$. Точки $\mathbf{p}$ и $R_i^+(\mathbf{p})$ сливаются при приближении $\mathbf{p}$ к граничному лучу сектора S_i^k против часовой стрелки (рис. 4.2(а)). При приближении $\mathbf{p}$ к другому граничному лучу отражение $R_i^+(\mathbf{p})$ стремится к вершине $\mathbf{t}_i^{k \oplus 1}$ сектора $S_i^{k \oplus 1}$. Поведение теней в том же контексте показано на подрисунке 4.2б. Функция $R_i^+(\mathbf{p})$ липшиц-непрерывна по $\mathbf{p} \neq \mathbf{r}_i$. Аналогичные свойства справедливы для $R_i^-(\mathbf{p})$.

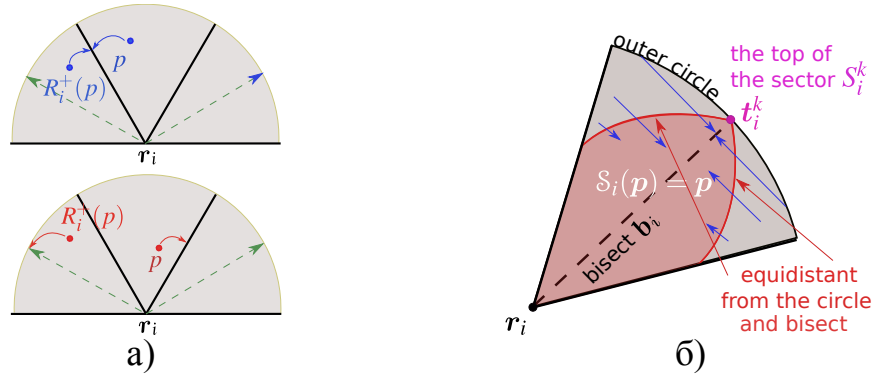


Рисунок 4.2 — (а) Поведение отражений; (б) Поведение теней

Построение тени точки $\mathbf{p} \in M_i, \mathbf{p} \neq \mathbf{r}_i$:

Шаг 1: Строится единичный вектор $\vec{n}$, нормальный к биссектрисе сектора $S_i^{\text{sec}_i(p)}$ и направленный против часовой стрелки;

Шаг 2: Вычисляются знаковое расстояние до биссектрисы D_{bis} и D_{out} — расстояние до границы M_i :

$$D_{\text{bis}} := \langle \vec{n}_i(\mathbf{p}); \mathbf{p} - \mathbf{r}_i \rangle, \quad D_{\text{out}} := R_{\text{sen}} - \|\mathbf{p} - \mathbf{r}_i\|;$$

Шаг 3: Определяется невязка: $\mu := |D_{\text{bis}}| - D_{\text{out}}$;

Шаг 4: Находится вектор направления к тени:

$$\widetilde{\mathcal{S}}_i(\mathbf{p}) := \mathbf{p} - \mathbf{r}_i - \begin{cases} \mu \cdot \vec{n}_i(\mathbf{p}) \text{sgn } D_{\text{bis}}, & \text{при } |D_{\text{bis}}| > D_{\text{out}}, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

Шаг 5: Тень $\mathcal{S}_i(\mathbf{p})$ строится вдоль найденного направления на расстоянии $\|\mathbf{p} - \mathbf{r}_i\|$:

$$\mathcal{S}_i(\mathbf{p}) = \mathbf{r}_i + \frac{\widetilde{\mathcal{S}}_i(\mathbf{p})}{\|\widetilde{\mathcal{S}}_i(\mathbf{p})\|} \|\mathbf{p} - \mathbf{r}_i\|. \quad (4.8)$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения:

Замечание 9. Тень $\mathcal{S}_i(\mathbf{p})$ является липшиц-непрерывной функцией точки $\mathbf{p} \in S_i^k \setminus \mathbf{r}_i$ и расположена не дальше от биссектрисы $\vec{m}_k$ сектора S_i^k , чем сама $\mathbf{p}$. Если $\mathbf{p}$ ближе к биссектрисе, чем к границе $\mathfrak{C}_i$ зоны M_i (такие точки образуют светло-красное множество на рис. 4.2б), то $\mathcal{S}_i(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$. В противном случае $\mathbf{p}$ сначала смещается вдоль нормали $\vec{n}$ к биссектрисе до расстояния, равного исходному расстоянию от $\mathbf{p}$ до $\mathfrak{C}_i$, удаляясь от $\mathfrak{C}_i$. Затем радиус-вектор масштабируется для восстановления исходного расстояния до $\mathfrak{C}_i$. Если изначально $\mathbf{p} \in \mathfrak{C}_i$, то $\mathcal{S}_i(\mathbf{p})$ совпадает с вершиной сектора.

Назначение «ближайшего соседа». Для конечного непустого множества $P \subset S_i^k$ кандидатов роль назначается точке, непрерывно зависящей от элементов P , но не обязательно принадлежащей P . Если $P \subset \mathfrak{C}_i$, роль назначается вершине t_i^k (рис. 4.2б). Иначе выполняются шаги:

nn.1) Вычисление веса каждой точки $\mathbf{p} \in P$:

$$w_i(\mathbf{p}|P) := \frac{(R_{\text{sen}} - \|\mathbf{p} - \mathbf{r}_i\|)^2}{\sum_{\mathbf{p}' \in P} (R_{\text{sen}} - \|\mathbf{p}' - \mathbf{r}_i\|)^2}; \quad (4.9)$$

nn.2) Определение относительной позиции «назначенного соседа» как выпуклой комбинации:

$$\mathbf{n}_i(P) := \sum_{\mathbf{p} \in P} w_i(\mathbf{p}|P)(\mathbf{p} - \mathbf{r}_i). \quad (4.10)$$

Чем ближе $\mathbf{p}$ к роботу i , тем больше её вес (4.9). Таким образом, приоритет отдаётся ближайшим соседям без полного игнорирования остальных.

Описание алгоритма CSA . Алгоритм использует параметры C и s из **SA** .

В каждый момент времени $t \geq 0$ робот i выполняет:

с.1) Заменяет элементы множества (4.2) их тенями и тенями отражений, формируя:

$$\mathfrak{N}_i := \left\{ \mathcal{S}_i(\mathbf{r}_j), \mathcal{S}_i[R_i^\pm(\mathbf{r}_j)] : j \in \mathcal{N}_i \right\}; \quad (4.11)$$

с.2) Распределяет $\mathfrak{N}_i$ по s секторным бинам $\mathfrak{B}_i^k$ (аналогично (4.3));

с.3) Добавляет вершину сектора в пустые бины;

с.4) В каждом бине $\mathfrak{B}_i^k$ вычисляет радиус-вектор «назначенного соседа» $\mathbf{n}_i^k := \mathbf{n}_i(\mathfrak{B}_i^k)$ по (4.10);

с.5) Вычисляет управление u_i по тем же правилам, что и в **SA** (формулы (4.5) и (4.6)).

Следующее утверждение показывает, что **CSA** устраняет разрывы, характерные для **SA** .

Предложение 4.2.1. Пусть $s \geq 3$. Для любого робота i управляющий сигнал u_i , генерируемый **CSA** , является липшиц-непрерывной функцией состояния команды $\mathfrak{R} := \{\mathbf{r}_i\}_{i=1}^N$.

Доказательство. Согласно (4.5) и (4.6), достаточно показать, что для любого k выход $\mathbf{n}_i^k$ шага **с.4)** **а)** ненулевой и **б)** липшиц-непрерывен по $\mathfrak{R}$.

а) Из (4.2) следует $\mathbf{r}_j \neq \mathbf{r}_i \ \forall j \in \mathcal{N}_i$, поэтому все элементы (4.11) отличны от $\mathbf{r}_i$ (по (4.7), (4.8)). Согласно **с.2)** и **с.3)**, бины непусты, содержат ненулевые векторы и лежат в секторах с углом $\leq 120^\circ$ (при $s \geq 3$). Следовательно, выпуклая комбинация (4.10) (при $P := \mathfrak{B}_i^k$) ненулевая.

б) Правила **nn.1)**, **nn.2)** и замечания 8, 9 гарантируют липшиц-непрерывность $\mathbf{n}_i^k$ вблизи состояний, где отсутствуют:

1. Роботы на граничной окружности $\mathfrak{C}_i$;
2. Роботы на граничных лучах секторов;
3. Элементы множества (4.11) на таких лучах.

Осталось исследовать $\mathbf{n}_i^k(\cdot)$ вблизи состояний $\mathfrak{R}_*$, где выполняются 1), 2) или 3). Рассмотрим эти случаи отдельно.

1) При изменении $\mathfrak{R}$ вблизи $\mathfrak{R}_*$ множество (4.2) может изменяться за счёт добавления или исключения робота j . Это происходит, когда $\mathbf{r}_j \in \mathfrak{C}_i$. Тогда $\mathfrak{C}_i$ содержит любое отражение $\mathbf{r}_f$ робота $\mathbf{r}_j$, и по Замечанию 8 тени $\mathbf{r}_f$ и $\mathbf{r}_j$ совпадают с вершинами соответствующих секторов. В (4.10) (при $P := \mathfrak{B}_i^k$) скачки возможны только для этих теней. Согласно (4.9), их веса равны нулю при

$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_*$ и гладко зависят от $\mathfrak{R}$ при приближении $\mathbf{r}_j$ к $\mathfrak{C}_i$ или удалении от неё. Следовательно, липшиц-непрерывность не нарушается.

2) Построение тени $\mathbf{p}$ использует биссектрису сектора $S_i^{\text{sec}_i(\mathbf{p})}$, содержащего $\mathbf{p}$. Если $\mathbf{p}$ лежит на общем луче двух секторов S_i^k и $S_i^{k\oplus 1}$, то $\text{sec}_i(\mathbf{p}) = k \oplus 1$. Все шаги построения тени корректны при использовании биссектрисы другого сектора S_i^k . Обозначим результат как $\mathcal{S}_i^k(\mathbf{p})$, а истинную тень — как $\mathcal{S}_i^{k\oplus 1}(\mathbf{p})$. Тогда $\mathcal{S}_i^k(\mathbf{p})$ липшиц-непрерывна по $\mathbf{p} \in \overline{S_i^k} \setminus \mathbf{r}_i$.

Пусть $\mathfrak{R}$ изменяется вблизи $\mathfrak{R}_* = \{\mathbf{r}_j^*\}$. Робот j может перемещаться между смежными секторами (напр., S_i^k и $S_i^{k\oplus 1}$), проходя через точку $\mathbf{r}_j^*$ на их общем луче. Согласно п.1 доказательства, достаточно рассмотреть случай $\mathbf{r}_j^* \notin \mathfrak{C}_i$.

Пусть $\mathbf{r}_j \in S_i^k$ стремится к $\mathbf{r}_j^*$. Тогда:

- $R_i^+(\mathbf{r}_j) \rightarrow \mathbf{r}_j^*$, $R_i^+(\mathbf{r}_j) \in S_i^{k\oplus 1}$ (по Замечанию 8);
- $R_i^-(\mathbf{r}_j) \rightarrow \mathbf{t}_i^{k\oplus 1}$, $R_i^-(\mathbf{r}_j) \in S_i^{k\oplus 1}$;
- $\mathcal{S}_i(\mathbf{r}_j) = \mathcal{S}_i^k(\mathbf{r}_j) \rightarrow \mathcal{S}_i^k(\mathbf{r}_j^*)$;
- $\mathcal{S}_i[R_i^+(\mathbf{r}_j)] = \mathcal{S}_i^{k\oplus 1}[R_i^+(\mathbf{r}_j)] \rightarrow \mathcal{S}_i^{k\oplus 1}(\mathbf{r}_j^*)$;
- $\mathcal{S}_i[R_i^-(\mathbf{r}_j)] \rightarrow \mathbf{t}_i^{k\oplus 1}$.

Если же $\mathbf{r}_j$ приближается к $\mathbf{r}_j^*$ через сектор $S_i^{k\oplus 1}$:

- $R_i^-(\mathbf{r}_j) \rightarrow \mathbf{r}_j^*$, $R_i^-(\mathbf{r}_j) \in S_i^k$;
- $R_i^+(\mathbf{r}_j) \rightarrow \mathbf{t}_i^{k\oplus 2}$, $R_i^+(\mathbf{r}_j) \in S_i^{k\oplus 2}$;
- $\mathcal{S}_i(\mathbf{r}_j) = \mathcal{S}_i^{k\oplus 1}(\mathbf{r}_j) \rightarrow \mathcal{S}_i^{k\oplus 1}(\mathbf{r}_j^*)$;
- $\mathcal{S}_i[R_i^+(\mathbf{r}_j)] \rightarrow \mathbf{t}_i^{k\oplus 2}$;
- $\mathcal{S}_i[R_i^-(\mathbf{r}_j)] \rightarrow \mathcal{S}_i^k(\mathbf{r}_j^*)$.

Таким образом, при $\mathbf{r}_j \rightarrow \mathbf{r}_j^*$ множество (4.11) сходится к одному из двух предельных множеств, различающихся элементами $\mathbf{t}_i^{k\oplus 1}$, $\mathbf{t}_i^{k\oplus 2}$. Поскольку в (4.10) эти элементы имеют нулевые веса (4.9), а веса липшиц-непрерывны, функция $\mathbf{n}_i^k$ липшиц-непрерывна по $\mathfrak{R}$.

3) Достаточно отметить, что данная ситуация невозможна, если не выполняются пп.1 и 2. □

4.3. Метрики эффективности

Существуют практические причины для оценки качества покрытия площади с различных аспектов. Поэтому неудивительно, что в литературе

предложено множество метрик качества. Используется не одна, а целый набор метрик для многогранного анализа алгоритмов. **Затраченное время [157]** Время до полной остановки всех роботов.

Процент покрытия [157] Доля площади, покрытая объединением зон мониторинга:

$$\text{Coverage_percentage} := \frac{S(\bigcup_{i=1}^N M_i)}{S(\mathcal{R})}. \quad (4.12)$$

Среднее расстояние [157] Среднее расстояние, пройденное роботами.

Равномерность расстояний [157] Индекс, усредняющий дисперсию расстояний до соседей по всем роботам:

$$\text{Distances_uniformity} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{\frac{1}{|\mathcal{N}_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (d_{ij} - M_i)^2},$$

где $d_{ij} := \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|$, $M_i := \frac{1}{|\mathcal{N}_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} d_{ij}$.

Энергопотребление [158] Суммарная энергия, затраченная всеми роботами (1 единица энергии на 1 единицу пути).

Вводим новый критерий для оценки вариативности числа роботов, обнаруживающих точку при её движении по всей области $\mathcal{R}$.

Равномерность покрытия площади. Пусть $C(\mathbf{r}) = |\{j: \mathbf{r} \in M_j\}|$ — число роботов, обнаруживающих $\mathbf{r}$ ($C(\mathbf{r}) := 0$ при отсутствии). Тогда:

$$\text{Area_uniform} := \sqrt{\frac{1}{S(\mathcal{R})} \int_{\mathcal{R}} [C(\mathbf{r}) - C_{\text{mean}}]^2 d\mathbf{r}},$$

где $C_{\text{mean}} := \frac{1}{S(\mathcal{R})} \int_{\mathcal{R}} C(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$.

Индекс C_{mean} оценивает среднее число роботов, которое нужно отключить для нарушения покрытия. Высокое значение **Area_uniform** сигнализирует о наличии ”слабых мест” в сети — зон с низкой или высокой концентрацией роботов. Первые уязвимы, так как требуют меньшего числа отключений для нарушения покрытия. Вторые нежелательны как приоритетные цели для атак с массовым отключением.

Таким образом, **Area_uniform** фокусируется на уязвимостях. Равномерность распределения между заданными подобластями можно оценивать через энтропию размещения, но это требует искусственного разбиения сцены на ячейки, что не входит в исходный сценарий.

4.4. Анализ эффективности алгоритмов

Чтобы подчеркнуть мотивацию и продемонстрировать преимущества управляющих протоколов, предложенных в разд. 4.2.1 и 4.2.2, качество их работы сравнивается с несколькими известными алгоритмами, применимыми в рассматриваемом сценарии. Для удобства читателя ниже приводится краткое описание этих алгоритмов; за подробностями отсылаем к оригинальным работам.

4.4.1. Алгоритмы покрытия области на основе виртуальных силовых полей (VFB)

Распределённый алгоритм самораспространения (DSSA) [157] работает с дискретной моделью времени:

$$\mathbf{r}_i(t+1) = \mathbf{r}_i(t) + \mathbf{u}_i(t), \quad t = 0, 1, \dots \quad (4.13)$$

Параметры: $O_{\text{lim}}, S_{\text{lim}}$ – ограничения на количество колебательных шагов и шагов «отметки времени»; e – порог для классификации типа шага.

Начало работы робота i : При $t = 0$ инициализирует счётчики $O_i := 0, S_i := 0$.

Действия робота в момент t :

1. Устанавливает ожидаемую плотность узлов: $\mu = \frac{N \cdot \pi \cdot R_{\text{sen}}^2}{S(\mathcal{R})}$;
2. Определяет количество соседей $D_i(t) = |\mathcal{N}_i(t)|$, где:

$$\mathcal{N}_i(t) := \{j : \|\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t)\| < R_{\text{sen}}\}; \quad (4.14)$$

3. Вычисляет виртуальную силу от каждого соседа $j \in \mathcal{N}_i(t)$:

$$F_{ij}(t) := \frac{D_i(t)}{\mu^2} (\|\mathbf{r}_{ij}(t)\| - R_{\text{sen}}) \frac{\mathbf{r}_{ij}(t)}{\|\mathbf{r}_{ij}(t)\|}, \quad (4.15)$$

$$\text{где } \mathbf{r}_{ij}(t) := \mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_i(t); \quad (4.16)$$

4. Вычисляет «предупреждение»:

$$\tilde{u}_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} F_{ij}(t);$$

5. Проверяет осцилляторный статус шага:
 если $|\mathbf{r}_i(t-1) - \mathbf{r}_i(t) - \tilde{u}_i(t)| < e$, то $O_i := O_i + 1$;
 если $O_i \geq O_{\text{lim}}$, то $u_i(t) := \frac{\tilde{u}_i(t)}{2}$ и переход к 8);
 6. Проверяет статус «отметки времени»:
 если $|\tilde{u}_i(t)| < e$, то $S_i := S_i + 1$
 если $S_i \geq S_{\text{lim}}$, то $u_i(t) := 0$ и переход к 8);
 7. $u_i(t) := \tilde{u}_i(t)$, обновляет $\mathbf{r}_i(t+1)$, $t := t+1$, и возврат к 2);
 8. Обновляет $\mathbf{r}_i(t+1)$, $t := t+1$, и останавливается.
- Далее аргумент t опускается для краткости.

Алгоритм самоорганизующегося развёртывания узлов (SODA) [159] также использует модель (4.13). Отличие от **DSSA**: в (4.15) используется $\frac{\min\{D_i, \mu\}}{\mu^2}$ вместо $\frac{D_i}{\mu^2}$.

Умный алгоритм самоорганизующегося развёртывания (SSND) [158] использует динамическое подмножество узлов с параметром $\alpha > 0$.
Инициализация робота i : При $t = 0$ задаёт $m_i := 0$ (число перемещений).

Действия робота:

1. Вычисляет $\tilde{u}_i$ по **DSSA**;
2. Определяет $\mathcal{N}_i^{lf} := \{j \in \mathcal{N}_i : \tilde{u}_i \geq \tilde{u}_j\}$;
3. Вычисляет приоритет:

$$\text{Elig}_i := \frac{\alpha \cdot (|\mathcal{N}_i^{lf}| - m_i) - |\mu - D_i|}{N}$$

4. Если $\text{Elig}_i \geq \max_{j \in \mathcal{N}_i} \text{Elig}_j$, то $m_i += 1$ и движение по **DSSA**; иначе бездействие.

Биоинспирированный алгоритм (SWARM [160]) использует:

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1, \quad w_1, w_2, w_3 \geq 0.$$

Действия робота:

1. Определяет $|\mathcal{N}_i|$ из (4.14);
2. Формирует множество $\mathcal{O}_i$ точек на границах препятствий;

3. Вычисляет силы:

$$F_i^{\text{sep}} := \frac{1}{|\mathcal{N}_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{\sqrt{3}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{2|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3}$$

$$F_i^{\text{coh}} := \left(\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \mathbf{r}_j \right) - \mathbf{r}_i$$

$$F_i^{\text{align}} := \frac{1}{|\mathcal{N}_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} u_j(t-1)$$

$$F_i^{\text{obs}} := \frac{1}{|\mathcal{O}_i|} \sum_{p \in \mathcal{O}_i} \frac{\sqrt{3}(\mathbf{p} - \mathbf{r}_i)}{2|\mathbf{p} - \mathbf{r}_i|^2}$$

4. Вычисляет управление: $u_i = w_1(F_i^{\text{sep}} + F_i^{\text{obs}}) + w_2 F_i^{\text{coh}} + w_3 F_i^{\text{align}}$;

5. Обновляет $\mathbf{r}_i(t+1)$ и возврат к 1.

Алгоритм виртуальных пружин (VFA-SF) [119] работает с непрерывной моделью второго порядка:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = u_i(t)$$

Параметры:

- ◆ $\kappa > 0, D_m > 0$ (параметры пружины)
- ◆ $\gamma \geq 0$ (демпфирование)
- ◆ F_{centri} (центростремительная сила)

Действия робота:

1. Определяет соседей (4.14);
2. Формирует множество $\Phi_i(t)$ соседей, удовлетворяющих:

$$\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\| \leq \|\mathbf{r}_{j'} - \mathbf{r}_i\| \quad \forall j' \text{ ИЛИ}$$

угол между $\mathbf{r}_{j'} - \mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i > 60^\circ$

3. Вычисляет управление:

$$u_i(t) := F_i^e + F_i^f + F_i^{\text{ce}}$$

$$F_i^e = \sum_{j \in \Phi_i} \kappa(d_{ij} - D_m) \mathbf{r}_{ij}$$

$$F_i^{\text{ce}} = -F_{\text{centri}} \mathbf{r}_i(t)$$

$$F_i^f = \begin{cases} -F_i^e - F_i^{\text{ce}}, & \text{если } \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \approx 0 \\ -\gamma \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}, & \text{иначе} \end{cases}$$

4.4.2. Постановка эксперимента

В проведённых тестах роботы изначально распределены случайным образом внутри диска радиусом 1.0 м. Для каждой из четырёх исследуемых сцен и семи алгоритмов проводится девять серий тестов. Количество роботов варьируется от 10 до 50 с шагом 5 между сериями. Каждая серия включает 100 тестов, различающихся начальным расположением роботов. Значения метрик усредняются по всем тестам серии и отображаются на рис. 4.4, 4.6, 4.8 и 4.10, где серии идентифицируются по количеству роботов на оси абсцисс. Общее число тестов: $9 \times 100 = 900$ на каждую пару «сцена $\times$ алгоритм» (итого $4 \times 7 \times 900 = 25200$ прогонов).

Границы сцен и препятствий моделируются цепочками «фиктивных» стационарных роботов, равномерно распределённых вдоль этих границ. Движения реальных роботов зависят от фиктивных, так как первые обнаруживают вторых и обрабатывают их как обычных соседей.

Максимальная скорость роботов: $\bar{v} = 4.0$ м/с. Для алгоритмов с непрерывным временем скорость принудительно ограничивается; Для дискретных алгоритмов шаг времени соответствует $\tau = 20.0$ мс, управление u_i из (4.13) ограничивается на уровне $\bar{v} \cdot \tau = 0.08$ м. Саттурация вектора $\vec{v}$ на уровне $L > 0$: $\vec{v}$ при $\|\vec{v}\| \leq L$, иначе $L\vec{v}/\|\vec{v}\|$.

Во всех тестах $R_{\text{sen}} = 2.0$ м. Параметры алгоритмов:

SA и CSA	DSSA, SODA, SSND
$s = 6$, $C = 10$ (для CSA), $C = 6$ (для SA)	$O_{\text{lim}} = S_{\text{lim}} = 10$, $e = 0.0052$ м, $\alpha = 1$ (для SSND)
SWARM	VFA-SF
$w_1 = w_2 = 0.4$, $w_3 = 0.2$	$\kappa = 15$, $D_m = R_{\text{sen}}/\sqrt{3}$, $\gamma = 7.75$, $F_{\text{centri}} = 0.005$

Алгоритмы **SODA**, **DSSA** и **SSND** демонстрируют сходное качество работы. На некоторых рисунках (напр., 4.4, 4.6) представлены не все графики этой группы — оставшийся служит репрезентантом.

В графиках расстояния — в метрах, время — в секундах, энергия — в условных единицах (см. разд. 4.3).

Видеозаписи тестов и дополнительные материалы доступны по ссылке:

https://drive.google.com/drive/folders/1x_9HW-35Qo9lj3xcoB6eFlb7fy8U9Tso?usp=sharing

4.4.3. Симуляционные тесты: сцена в виде бабочки

Данная сцена, проиллюстрированная на рис. 4.3, моделирует ситуацию с узким проходом между двумя камерами. На рис. 4.3, как и на последующих

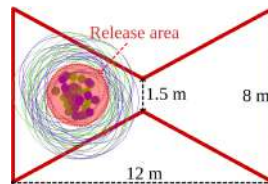


Рисунок 4.3 — Сцена в форме бабочки

рис. 4.5, 4.7 и 4.9, начальные позиции роботов обозначены жирными точками, диск их начального распределения показан светло-красным цветом, а множество тонких окружностей отображает границы зон мониторинга всех роботов при стартовом размещении. В сцене рис. 4.3 команда роботов начинает движение в левой камере и должна распределиться по обеим камерам, частично проникая через узкий проход. Эта сцена позволяет оценить способность алгоритмов преодолевать «узкие места» в окружающей среде.

Согласно рис. 4.4, алгоритмы **CSA** и **SA** действительно демонстрируют такую способность. По проценту покрытия они превосходят конкурентов для больших команд (≥ 30 роботов) и входят в число лучших для малых команд, при этом **CSA** значительно опережает **SA** при умеренных размерах команды ($N \in [20, 28]$). Для максимального размера команды **CSA** и **SA** достигают почти идеального 100% покрытия, тогда как конкуренты не превышают $\approx 85\%$. Среди них **VFA-SF** показывает лучшие результаты для небольших команд ($N \leq 45$) и даже сравнивается с **SA** при $N \leq 25$, но уступает **SODA** и **DSSA** при больших размерах команды ($N > 45$). Неожиданно низкие результаты **SSND** для

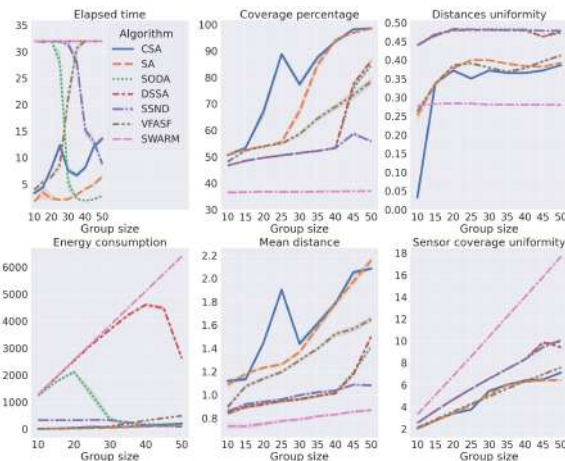


Рисунок 4.4 — Качество работы алгоритмов в сцене «бабочка»

больших команд контрастируют с почти неразличимым качеством работы внутри трио **SODA**, **DSSA**, **SSND** при умеренных размерах ($N \leq 42$), что объясняется использованием общей ключевой формулы (4.15). Алгоритм **SWARM** остаётся аутсайдером из-за отсутствия сходимости.

В отношении равномерности покрытия (меньшие значения предпочтительнее) **SA**, **CSA** и **VFA-SF** формируют явную группу лидеров, тогда как **SWARM** сохраняет статус аутайдера. Алгоритмы **SODA**, **DSSA**, **SSND** демонстрируют промежуточные значения, причём разрыв с лидерами увеличивается с ростом размера команды.

Все тесты останавливались при $t = 32$ сек; на графике времени это значение указывает на отсутствие сходимости алгоритма. Это характерно для **SODA** и **SSND** с малыми командами, **VFA-SF** с большими командами и **SWARM** независимо от размера. **CSA** и **SA** сходятся при всех размерах, причём **SA** доминирует при $N \leq 35$. Однако для больших команд **CSA** и **SA** уступают **SODA** и **SSND**, что объясняется более ранней остановкой в «плохих» позициях из-за худшего покрытия. Эта логика применима и к другим сценам.

Средняя пройденная дистанция максимальна для **CSA** и **SA**, так как эти алгоритмы мотивируют роботов преодолевать большие расстояния для равномерного покрытия. При этом **CSA**, **SA** и **VFA-SF** занимают средние позиции по равномерности дистанций. Лидерство **SWARM** связано с низким процентом покрытия: роботы движутся кластером, что обеспечивает равномерность дистанций, но препятствует распределению по области.

Энергопотребление всех алгоритмов при сходимости примерно одинаково для больших команд. **CSA** и **SA** входят в число лучших для всех размеров.

В случаях отсутствия сходимости энергопотребление растёт пропорционально размеру команды.

Видеозаписи тестов в сцене «бабочка» доступны по адресу:
<https://drive.google.com/drive/folders/1EaQyaH3X2QzNmDpbWETiw2caB4vbJOeu>

4.4.4. Симуляционные тесты: круглый коридор

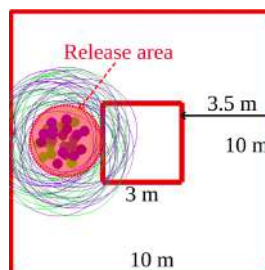


Рисунок 4.5 — Круговой коридор

В сцене на рис. 4.5 роботы должны двигаться по круговому коридору в двух направлениях, встретиться в его середине и равномерно покрыть всю область. Цель эксперимента — оценить способность алгоритмов проникать во все проходы, обтекать препятствия и объединять роботов в единую группу после столкновения подгрупп на «встречных курсах».

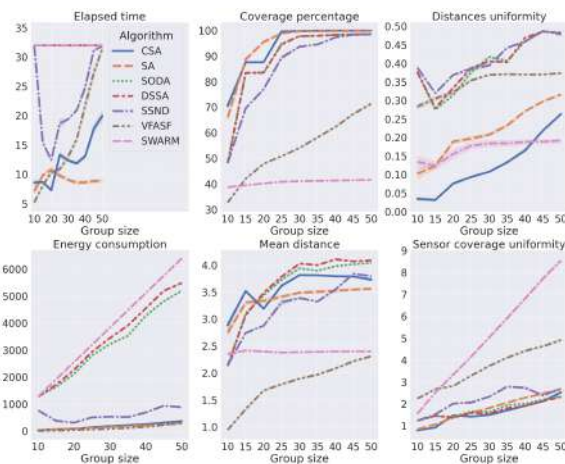


Рисунок 4.6 — Качество работы алгоритмов в круговом коридоре

Согласно рис. 4.6, алгоритмы **CSA** и **SA** успешно выполняют задачу, лидируя по проценту покрытия и равномерности для команд любого размера. Как и ранее, они достигают почти 100% покрытия, причём в круговом коридоре это происходит для меньших размеров команд, чем в сцене «бабочка». В отличие от рис. 4.4, алгоритмы **SODA**, **DSSA** и **SSND** обеспечивают схожие показатели для больших команд. Алгоритм **SWARM** остаётся аутсайдером, а **VFA-SF** демонстрирует худшую равномерность покрытия по сравнению с предыдущим экспериментом.

Графики времени выполнения показывают, что **SWARM** не сходится независимо от размера команды, а **SSND**, **DSSA**, **VFA-SF** и (в отличие от сцены «бабочка») **SODA** испытывают проблемы со сходимостью для больших команд. Алгоритмы **CSA** и **SA** сходятся для всех размеров, превосходя конкурентов при $N \geq 30$. При этом **CSA** сходится медленнее **SA** для больших команд, что объясняется его более «осторожным» поведением для исключения разрывов управления.

По равномерности пройденных дистанций алгоритмы делятся на две группы. **CSA**, **SA** и **SWARM** показывают лучшие результаты: **CSA** лидирует при $N \leq 42$, а **SWARM** — для больших команд (причина обсуждалась в разд. 4.4.3). Остальные алгоритмы формируют вторую группу с худшими и схожими показателями. Меньший процент покрытия **SWARM** и **VFA-SF** коррелирует с меньшими пройденными дистанциями, как и в разд. 4.4.3. Энергопотребление сходящихся алгоритмов остаётся сопоставимым.

Видеозаписи тестов доступны по адресу:

<https://drive.google.com/drive/folders/1LjTbvcZ-yPsCJe8F2XocuoZRjxuq2-tL>

4.4.5. Симуляционные тесты: сцена с двумя препятствиями

В сцене рис. 4.7 два квадратных препятствия блокируют доступ к углам квадратной области из центра, где первоначально расположены роботы. Основная цель — оценить способность алгоритмов достигать углов через узкие проходы. Тесты останавливались при $t = 16$ сек.

Согласно графику процента покрытия на рис. 4.8, алгоритмы **CSA** и **SA** обеспечивают почти 100% покрытие для больших команд, тогда как другие

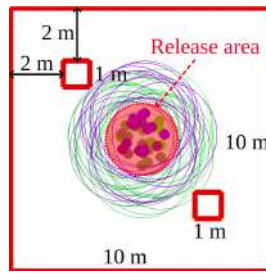


Рисунок 4.7 — Сцена с двумя квадратными препятствиями

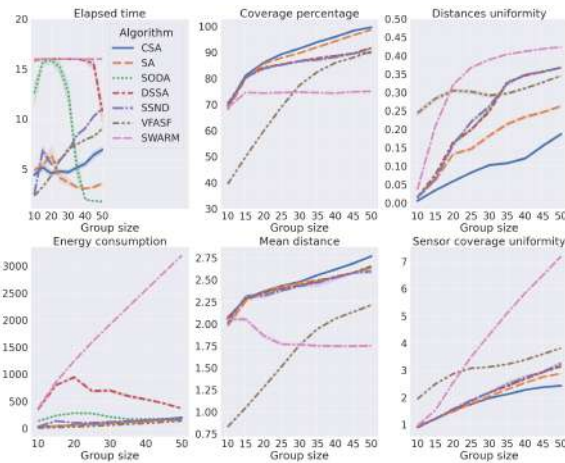


Рисунок 4.8 — Качество работы алгоритмов в сцене с двумя препятствиями

методы не превышают 90%. При этом **SWARM** и **VFA-SF** улучшают свои результаты по сравнению с разд. 4.4.4. В терминах равномерности покрытия лидерство **CSA** и **SA** становится ещё более выраженным.

На графике времени выполнения видно, что **CSA** и **SA** всегда сходятся за конечное время. Проблемы со сходимостью наблюдаются у **SODA** и **DSSA** для малых команд и у **SWARM** для всех размеров. Как и в разд. 4.4.3, **SODA** останавливает роботов раньше **CSA** и **SA** для больших команд из-за худшего покрытия. По равномерности дистанций **CSA** и **SA** превосходят другие методы для всех размеров команд, в отличие от сцен на рис. 4.3 и 4.5.

Видеозаписи тестов доступны по адресу:

<https://drive.google.com/drive/folders/1k-MmBJxy7p83tAxaliw5IG0EuxAYw-dL>

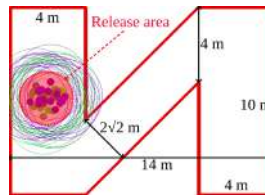


Рисунок 4.9 — Зигзагообразный коридор

4.4.6. Симуляционные тесты: коридор в виде зиг-зага

Сцена на рис. 4.9 предназначена для оценки алгоритмов при движении роботов через узкие проходы с резкими поворотами. Тесты завершались через 48.0 с.

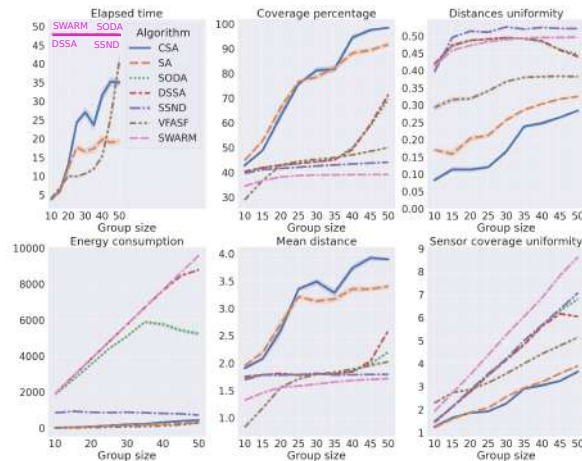


Рисунок 4.10 — Качество работы алгоритмов в зигзагообразном коридоре

Согласно рис. 4.10, алгоритмы **SA** и **CSA** становятся единственными лидерами по проценту покрытия и его равномерности, превосходя другие методы для всех размеров команд. Среди остальных методов **SODA**, **DSSA**, **SSND** и **VFA-SF** демонстрируют схожий процент покрытия при $N \leq 40$. При увеличении размера команды выше этого значения **SODA** и **DSSA** вырываются вперёд, тогда как **SSND** отстаёт. **VFA-SF** лидирует в этой группе по равномерности покрытия при $N \geq 20$. Алгоритм **SWARM** остаётся аутсайдером по обоим метрикам.

График времени выполнения показывает, что **SWARM**, **SODA**, **DSSA** и **SSND** не сходятся за время эксперимента. Группа сходящихся алгоритмов включает **SA**, **CSA** и **VFA-SF**. При $N \leq 40$ последний сходится быстрее, что

может быть связано с худшим качеством покрытия. Однако при $N > 40$ **SA** и **CSA** неожиданно превосходят **VFA-SF** по скорости сходимости.

По равномерности пройденных дистанций **CSA** и **SA** вновь лидируют, как и в сцене рис. 4.7. Большая средняя дистанция коррелирует с лучшим качеством покрытия. Энергопотребление сходящихся алгоритмов остаётся схожим.

Для команд размером $N \geq 25$ **CSA** превосходит **SA** по проценту покрытия и равномерности. Однако **SA** эффективнее по энергопотреблению и средней дистанции.

Видеозаписи тестов доступны по адресу:

<https://drive.google.com/drive/folders/1w9qb8yfQKQfqWiFuWDrho3CUfpP8BkXV>

4.4.7. Симуляционные тесты: усреднение по всем сценам

Предыдущий анализ, особенно его сравнительная часть, показывает, что сильные и слабые стороны методов в некоторой степени зависят от особенностей сцены. Для получения общей картины на рис. 4.11 представлены значения показателей качества, усреднённые по всем исследованным сценам.

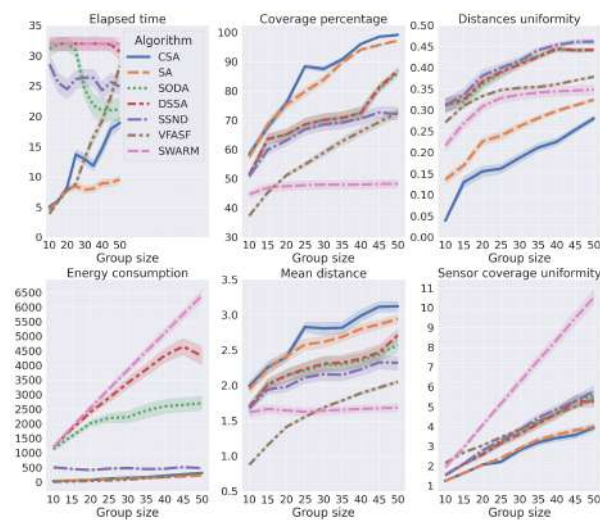


Рисунок 4.11 — Показатели качества, усреднённые по всем сценам

С точки зрения процента покрытия, его равномерности и равномерности дистанций усреднение подтверждает явное лидерство **SA** и **CSA**. По проценту

покрытия **CSA** незначительно превосходит **SA**, а по равномерности дистанций — существенно. Оба метода сопоставимы по равномерности покрытия. При этом **CSA** требует больше времени (до двух раз) для достижения результата, что можно считать обоснованной платой за лучшее качество покрытия.

Средняя дистанция, пройденная роботами под управлением **SA** и **CSA**, превышает показатели других методов. Это связано с более полным охватом всех участков сцены. По энергопотреблению **SA** и **CSA** делят лидерство с **VFA-SF**.

4.4.8. Тестирование **SA** и **CSA** в сложной сцене

Сцены из разд. 4.4.3—4.4.6 моделируют типовые особенности реальных сред. В данном разделе показано, что **SA** и **CSA** способны обрабатывать сложные сцены, напоминающие планировку здания. Сцена включает четыре камеры, круговой коридор и три прямых коридора. Тестирование проведено для 150 роботов с параметрами: $s = 8$ (рис. 4.1а), $C = 6$ (формула (4.6)).

Согласно рис. 4.12а, команда изначально размещена в диске радиусом 3.0 м в верхней левой камере. Через 18.0 с (рис. 4.12б) покрыто около половины сцены. К 60.0 с (рис. 4.12в) остаются непокрытыми правые камеры. Полное покрытие (с незначительными пропусками) достигается к 200.0 с (рис. 4.12г); соответствующая серия кадров приведена на рис. 4.12.

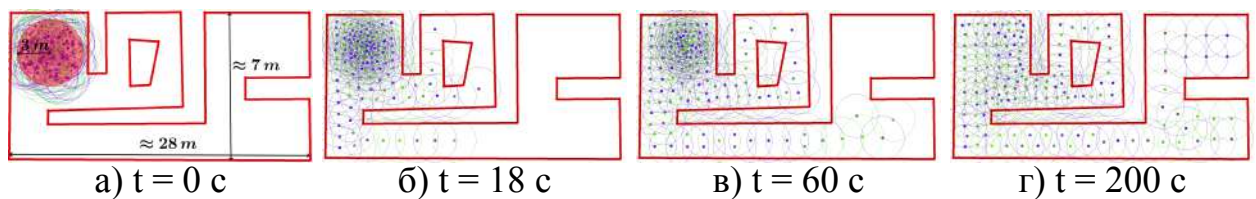


Рисунок 4.12 — Поведение команды под управлением **CSA**

Рис. 4.13 демонстрирует, что **SA** достигает аналогичных промежуточных и конечных результатов в два раза быстрее **CSA**.

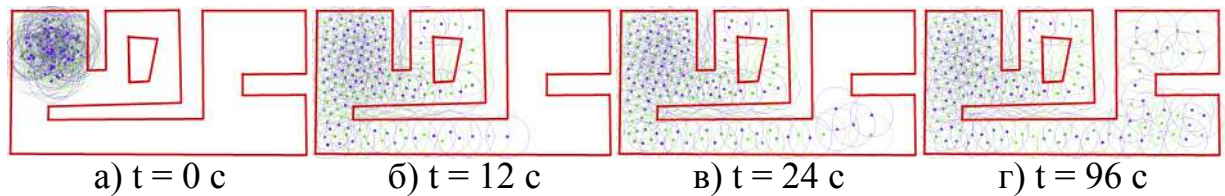


Рисунок 4.13 — Поведение команды под управлением SA

4.5. Заключение

В главе представлены два алгоритма самораспределения мобильных роботизированных сетей по неизвестным сложным областям в условиях отсутствия GPS — SA и CSA, относящиеся к подходу виртуальных сил. Роботы однородны, не используют связь для самораспределения, не знают размера команды и управляются общим правилом при доступе лишь к локальным относительным данным и общему направлению. Выполнен сравнительный анализ семи методов (включая DSSA, SODA, SSND, SWARM, VFA-SF) по комплексу метрик: время до остановки, процент покрытия, энергопотребление, средняя пройденная дистанция, равномерность дистанций, а также предложенный критерий равномерности покрытия области. По совокупности показателей процента и равномерности покрытия SA и CSA демонстрируют лучшие результаты, особенно в сложных сценах с препятствиями; CSA в среднем даёт более высокое качество покрытия ценой большего времени и энергозатрат, тогда как SA проще в реализации и быстрее. В отличие от ряда дискретных по времени конкурентов, предложенные алгоритмы работают в непрерывном времени и не опираются на специальные приёмы принудительной остановки команды, автоматически возобновляя движение при нарушении покрытия.

В следующей главе рассматривается родственная по духу однородности задача формирования равномерной замкнутой цепи по циклической выходной переменной при динамике второго порядка. Перспективы включают сравнение с методами на основе тесселяции Вороного, анализ случая индивидуально заданного направления, испытания на крупномасштабных командах и обобщение на трёхмерные среды и кинематику второго порядка.

ГЛАВА 5. Распределённая самоорганизация гомогенного роя роботов в равномерную замкнутую цепь с установлением информационной связности

Актуальность

Задача построения замкнутой цепной формации (*Problem of Building a Closed-Chain Formation*; далее — PBCCF) возникает в миссиях окружения, сопровождения и обхода точечных или протяжённых целей [70, 71, 161—163], в патрулировании, наблюдении, обороне и покрытии зон ответственности [3, 164, 165], а также как «строительный блок» более сложных сценариев. Требуется равномерно разместить выходы роботов по циклической переменной (угол, криволинейная абсцисса на замкнутом пути и т.п.) неизвестного периода и обеспечить общий заданный профиль скорости — в том числе когда размер команды и длина цикла неизвестны и неконтролируемы. Как и в главе 3, актуален полностью однородный рой без связи, глобальной нумерации и выделенных ролей [4, 8, 20], а также с доказательными гарантиями сходимости.

Состояние области исследований и её дефициты

Общие трудности управления однородными роями (в том числе несовместимость с методами, основанными на концепции лидеров, жёстких виртуальных структур, наличием идентификаторов у роботов; отсутствие строго обоснованных гарантий сходимости у многих методов) уже отмечались во введениях к диссертации и к главе 3. Для PBCCF значительная часть работ предполагает частичную неоднородность: заранее назначенные позиции в цепи, общую нумерацию или выделенные каналы связи [166—170]. При полной однородности чаще изучается кинематика интегратора первого порядка [167, 171—175]; переход ко второму порядку [166, 170, 176—178] обычно сопровождается доступом к относительным скоростям соседей и сходимостью лишь «в окрестность» целевого размещения [176—178]. Ограничения на скорость и ускорение, существенные динамические неопределённости [177,

178], автоматическое восстановление после потерь и добавления роботов, а также работа без начальной информационной связности (в том числе как модель восстановления после разрыва связности в ходе миссии) в специализированной литературе по RVCCF проработаны недостаточно. Смежная область adaptive cruise control на кольцевой дороге [179—189], как правило, задаёт установившуюся скорость длиной пути и числом машин, тогда как в роевых миссиях нужен именно предписанный профиль скорости при неизвестной численности команды и длине цикла. Неопределённость длины пути типична при обходе протяжённых или групповых целей с заданным отступом [163, 190] и при поиске и сопровождении изолиний неизвестных нестационарных естественных полей [191, 192]; качество заматающего покрытия одномерного барьера также существенно зависит от скорости движения [3, 53, 193, 194].

Новизна результатов главы

Рассматриваются роботы с нелинейной динамикой второго порядка, неопределённостями и ограничениями на скорости и управления; каждый измеряет собственную скорость и относительные значения циклического выхода соседей в конечной зоне видимости при незаслонённом обзоре. Предлагается распределённый протокол скользящего режима, обеспечивающий равномерное саморазмещение выходов и заданный (в том числе переменный) профиль скорости без требования начальной связности, с робастностью к выбыванию и добавлению роботов и исключением столкновений; используются только собственные скорости, без относительных скоростей соседей. Основные результаты применяются к заматающему покрытию одномерного барьера, извивающегося в трёхмерном пространстве (равномерность по длине пути либо по угловым секторам). Сходимость обоснована строго и подтверждена моделированием.

Ниже формулируются постановка и предположения, описывается протокол, приводятся иллюстративные примеры, результаты моделирования и заключительные замечания.

5.1. Постановка задачи и предположения теоретического анализа

Группа из $N \geq 2$ роботов, пронумерованных от 0 до $N - 1$, функционирует в непрерывном времени t . В каждый момент времени t агенту i присваивается величина называемая *выходом*.

Выход определяется вещественным числом $s_i(t)$, но с оговоркой, что s_i и $s_i \pm p$ описывают один и тот же выход, где $p > 0$ — заданная константа. Пример возникает в случае, когда s_i — угловая переменная (например, полярный угол точки или направление движения на плоскости); тогда $p = 2\pi$. Другой пример — группа транспортных средств на замкнутой дороге: тогда s_i — криволинейная абсцисса транспортного средства i , а p — периметр дороги.

Для удобства изложения будем интерпретировать $2\pi s_i/p$ как полярные углы некоторых точек ϱ_i на единичной окружности S_0^1 на плоскости, центрированной в начале координат, визуализируем выход s_i с помощью соответствующей точки ϱ_i и используем s_i и ϱ_i взаимозаменяемо; см. рис. 5.1а, 5.1б и общий рисунок 5.1.



Рисунок 5.1 — (а) Визуализация выходов; (б) Целевое размещение, $v^0(\cdot) = 0$

Пусть задан желаемый временной профиль $v^0(\cdot)$ скорости $v_i := \dot{s}_i$. Цель управления частично определяется следующим образом.

Определение 5.1.1. Говорят, что роботы достигают *равномерного саморазмещения и профиля скорости* $v^0(\cdot)$, если существует $s_* \in \mathbb{R}$ и нумерация роботов такая, что для всех t и i

$$i \frac{p}{N} + s_* + \int_0^t v^0(\tau) d\tau$$

является выходом $s_i(t)$ робота i с точностью до расхождения $\delta_i(t)$, и

$$\delta_i(t) \rightarrow 0, \quad \dot{s}_i(t) - v^0(t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty \quad \forall i. \quad (5.1)$$

Таким образом, если $v^0(t) = 0 \forall t$, выходы ϱ_i стремятся к N стационарным точкам, которые делят окружность S_0^1 на дуги равной длины (см. рис. 5.1б), а скорости $v_i := \dot{s}_i$ убывают до нуля. В общем случае это должно выполняться в системе отсчёта, вращающейся вокруг начала координат с угловой скоростью $\omega^0(t) := 2\pi v^0(t)/p$ (см. рис. 5.2а).

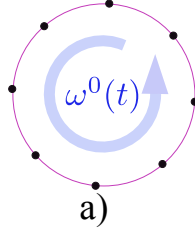


Рисунок 5.2 — Программируемое вращение целевого размещения, $\omega^0(t) := 2\pi v^0(t)/p$

Отсутствие столкновений между ϱ_i — ещё одно требование.

Определение 5.1.2. Размещение команды $\{\varrho_i\}_{i=0}^{N-1}$ называется *безконфликтным*, если $\varrho_i \neq \varrho_j \forall i \neq j$.

Грубо говоря, цель состоит в том, чтобы построить общее правило управления, которое, будучи запущенным на каждом роботе, обеспечивает свойства из опр. 5.1.1 и поддерживает безконфликтное размещение команды.

Чтобы детализировать эту цель, предположим, что эволюция любого выхода s_i подчиняется обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) второго порядка:

$$\ddot{s}_i(t) = f_i[t, P(t), V(t), u_i(t), \xi_i(t)], \quad u_i(t) \in \mathcal{U}_i. \quad (5.2)$$

Здесь u_i — управляющее воздействие, генерируемое i -м роботом, $\mathcal{U}_i \subset \mathbb{R}^{k_i}$ — множество допустимых управлений, тогда как

$$V(t) := \{v_i(t) = \dot{s}_i(t)\}_{i=0}^{N-1}, \quad P(t) := \{\varrho_i(t)\}_{i=0}^{N-1},$$

а $\xi_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ — *внешнее воздействие*, влияющее на эволюцию s_i .

Вход ξ_i используется для описания влияния изменяющихся во времени эндогенных и экзогенных неопределённостей (собранных в вектор $\lambda(\cdot)$) и постоянной параметрической неопределённости λ_0 , которые ограничены

условиями

$$\lambda(t) \in \Lambda \subset \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad \lambda_0 \in \Lambda_0 \subset \mathbb{R}^{n_0}, \quad (5.3)$$

соответственно.

Не исключается, что уравнение (5.2) может быть частью более сложной динамики r -го порядка, описание которой использует дополнительную переменную состояния $z \in \mathbb{R}^p$ и уравнение вида

$$z^{(r)}(t) = \mathcal{Z}[t, Z(t), P(t), V(t), U(t), \lambda(t), \lambda_0], \quad \text{где} \quad (5.4)$$

$$U(t) := \{u_i(t)\}_{i=0}^{N-1}, \quad Z(t) := \left\{z^{(k)}(t)\right\}_{k=0}^{r-1}. \quad (5.5)$$

Переменные $z(\cdot)$, $\lambda(\cdot)$ и λ_0 влияют на выход s_i через ξ_i , где

$$\xi_i(t) = \Xi_i[t, Z(t), P(t), V(t), \lambda(t), \lambda_0]. \quad (5.6)$$

Эта модель предполагает, что начальные данные для $z(\cdot)$ определяются из $P(0)$, $V(0)$, λ_0 , а $\lambda(\cdot)$ может включать воздействия (отличные от u_i), предназначенные для управления $z(\cdot)$.

Отображения $f_i(\cdot)$, $\mathcal{Z}(\cdot)$, $\Xi_i(\cdot)$ в уравнениях (5.2), (5.4), (5.6) и множества Λ , Λ_0 в (5.3) могут быть неизвестны; в основном они используются для качественной иллюстрации взаимосвязей и общих характеристик различных факторов. Позже на некоторые из них будут наложены ограничения.

Допустимые скорости ограничены заданным порогом:

$$|v_i| \leq \bar{v}. \quad (5.7)$$

Желаемый временной профиль скорости не должен превышать этот порог. Будем предполагать, что он даже не приближается к этому порогу: для некоторого $\varepsilon_v > 0$

$$v^0(t) \in [-\bar{v} + \varepsilon_v, \bar{v} - \varepsilon_v] \quad \forall t. \quad (5.8)$$

Протокол — это общее правило, следуя которому каждый робот индивидуально формирует своё управление на основе доступных данных.

Необходимо разработать протокол, который:

- порождает траекторию, определённую для всех $t \geq 0$;
- обеспечивает выполнение условия (5.7) и свойств из опр. 5.1.1;
- поддерживает безконфликтное размещение команды.

Эти свойства должны выполняться для всех возможных значений неопределённостей, а также при начальных условиях, делающих все поставленные цели достижимыми.

Например, бессмысленно стремиться к отсутствию столкновений, если изначально размещение не является безконфликтным или скорости велики относительно межроботных промежутков: тогда столкновения могут оказаться неизбежными из-за ограничений на управляющий сигнал в (5.2).

Для достижения поставленных целей роботы не используют средства связи. Кроме того, им неизвестен размер команды N .

С другой стороны, в момент времени t робот i имеет доступ:

- к целевой скорости $v^0(t)$ и собственной скорости $v_i(t) = \dot{s}_i(t)$;
- к относительным значениям выходов некоторых роботов j — при выполнении следующих условий.

Предположение 5.1.3. Существует известный (радиус видимости) порог $\Delta_{\text{vis}} \in (0, \pi)$ такой, что всякий раз, когда для $j \neq i$ выполняются условия: **а)** $0 < \angle[\varrho_i \curvearrowright \varrho_j] < \Delta_{\text{vis}}$ и **б)** дуга $\varrho_i \curvearrowright \varrho_j$ свободна от других выходов ϱ_k , — роботы i и j обладают информацией об угловой мере $\angle[\varrho_i \curvearrowright \varrho_j]$, зарегистрированной со знаком $-$ для i и $+$ для j , соответственно.

Здесь условие **б)** мотивировано сценариями, в которых промежуточный робот может «загораживать обзор», а также стремлением определить минимальный объём информации, при котором задача разрешима.

Если условия **а)** и **б)** выполняются, робот i (робот j) называется *прямым* (*обратным*) *соседом* робота j (робота i), а знаковая мера из предп. 5.1.3 обозначается как δ_i^- и δ_j^+ .

Если у робота i нет прямого/обратного соседа, то $\delta_i^+/\delta_i^- := \pm\Delta_{\text{vis}}$. Таким образом, $\delta_i^\pm$ всегда корректно определена и

$$\delta_i^- \in [-\Delta_{\text{vis}}, 0), \quad \delta_i^+ \in (0, \Delta_{\text{vis}}]. \quad (5.9)$$

Согласно предп. 5.1.3, любой робот i имеет доступ к $\delta_i^\pm$. При этом он может быть не в состоянии идентифицировать соответствующего соседа, т.е. определить его метку j .

Цель (5.1) едва ли достижима, если: **А)** информационная связность команды нарушена при целевом (равномерном) размещении, или **Б)** ускорение $\dot{v}^0$ выходит за пределы диапазона, реализуемого в системе (5.2).

Чтобы исключить случай **A)**, предположим, что

$$\Delta_{\text{vis}} > p/N. \quad (5.10)$$

Следующее предположение гарантирует, что случай **Б)** не выполняется.

Предположение 5.1.4. Целевой профиль скорости $v^0(\cdot)$ абсолютно непрерывен. Существует константа $\mu > 0$ и известные управляющие воздействия $u_i^{\langle -1 \rangle}, u_i^{\langle +1 \rangle} \in \mathcal{U}_i$ такие, что почти для всех $t \geq 0$ выполняется

$$f_i \left[t, P, \mathbf{V}, u_i^{\langle -1 \rangle}, \xi_i(t) \right] + \mu \leq \dot{v}^0(t) \leq f_i \left[t, P, \mathbf{V}, u_i^{\langle +1 \rangle}, \xi_i(t) \right] - \mu. \quad (5.11)$$

Эти неравенства должны выполняться при любых допустимых обстоятельствах, т.е. для любых $i, t \geq 0$, $\varrho_i \in S_0^1$, $v_i \in [-\bar{v}, \bar{v}]$, любого ξ_i , заданного уравнениями (5.4) и (5.6), и любых неопределённостей $\lambda(\cdot), \lambda_0$, удовлетворяющих условию (5.3).

Последнее предположение носит технический характер и необходимо для математической строгости. Чтобы сформулировать его, введём множество $\mathcal{U}$ всех последовательностей $\{u_i\}_{i=0}^{N-1}$ таких, что u_i является либо $u_i^{\langle -1 \rangle}$, либо $u_i^{\langle +1 \rangle}$ из предп. 5.1.4 для любого i . Пусть символ $\text{co } A$ обозначает выпуклую оболочку множества A .

Предположение 5.1.5. Пусть выполняются следующие утверждения:

- i) В уравнении (5.2) область определения функции $f_i(\cdot)$ содержит все её аргументы $(t, P, \mathbf{V}, u_i, \xi_i)$, описываемые условиями $t \geq 0$, $\varrho_i \in S_0^1$, $|v_i| \leq \bar{v}$, $u_i \in \text{cl}(\mathcal{U}_i)$, $\xi_i \in \mathbb{R}^{m_i}$;
- ii) В уравнениях (5.4) и (5.6) области определения функций $\mathcal{Z}(\cdot)$ и $\Xi_i(\cdot)$ содержат все их аргументы $(t, Z, P, \mathbf{V}, U, \lambda, \lambda_0)$, описываемые условиями $t \geq 0$, $Z \in \mathbb{R}^{pr}$, $\varrho_i \in S_0^1$, $|v_i| \leq \bar{v}$, $u_i \in \text{cl}(\mathcal{U}_i)$, $\lambda \in \text{cl}(\Lambda)$, $\lambda_0 \in \Lambda_0$;
- iii) Все функции $f_i(\cdot)$, $\mathcal{Z}(\cdot)$, $\Xi_i(\cdot)$ удовлетворяют локальному условию Липшица;
- iv) При любых допустимых начальных данных для $z(\cdot)$,¹ неопределённостях $\lambda(\cdot) \in \mathbb{L}_{\infty}^{\text{loc}}$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}^{n_0}$, удовлетворяющих (5.3), и измеримых функциях $\varrho_i(t) \in S_0^1$, $v_i(t) \in [-\bar{v}, \bar{v}]$, $t \geq 0$, любое решение

¹Напомним, что эти данные определяются $P(0)$, $\mathbf{V}(0)$ и λ_0 .

дифференциального включения (связанного с уравнением (5.4))

$$z^{(r)}(t) \in \mathfrak{G} \left[t, z(t), \dots, z^{(r-1)}(t) \right], \quad \text{где} \quad (5.12)$$

$$\mathfrak{G} [t, Z] := \text{co } \mathcal{Z} [t, Z, P(t), V(t), \mathfrak{U}, \lambda(t), \lambda_0], \quad (5.13)$$

продолжимо на бесконечный интервал $[0, \infty)$.

В уравнении (5.13) $\mathfrak{G} [t, Z]$ — это образ множества $\mathfrak{U}$ при отображении $U \mapsto \mathcal{Z} [t, Z, P(t), V(t), U, \lambda(t), \lambda_0]$.

Стандартная переформулировка уравнения (5.12) в виде дифференциального включения первого порядка относительно $Z(t)$ из (5.5) и использование [91, теор. 1, разд. 7] показывают, что локальное решение существует благодаря условиям i)–iii). Продолжаемость на $[0, \infty)$ (затребованная в iv)) обычно выполняется для реальных систем; математические достаточные условия доступны, например, в [195, 196].

Например, достаточно, чтобы выполнялось $\|\mathcal{Z} [t, Z, P, V, \mathfrak{U}, \lambda, \lambda_0]\| \leq A + B(\|Z\| + \|\lambda\|)$ с некоторыми константами A, B [195]. Продолжимость решений уравнения (5.2) не постулируется.

В заключение этого раздела приведём примеры сценариев, в которых описанная выше модель применима и удовлетворяет ключевому предп. 5.1.4.

1) Эволюция выхода описывается уравнением

$$\ddot{s}_i = u_i + \xi_i(t, s_i, \dot{s}_i),$$

где ξ_i — липшиц-непрерывная функция своих аргументов.

Пример — колёсные роботы, движущиеся цепочкой по круговой дороге. Тогда s_i описывает положение на дороге, u_i обозначает номинальное управляющее ускорение, а $\xi_i(t, s_i, \dot{s}_i)$ учитывает отклонения от номинала, вызванные, например, изменчивостью коэффициента сцепления и уклона дороги в разных точках (задаваемых s_i) и действием силы аэродинамического сопротивления (которая зависит от скорости $\dot{s}_i$ робота).

Пусть $\bar{\alpha}$ и $\bar{\xi}$ — верхние границы для $|\dot{v}^0(t)|$ и ξ_i , соответственно. Тогда (5.11) выполняется (с некоторым $\mu > 0$), если $\pm u_i^{(\pm 1)} > \bar{\alpha} + \bar{\xi}$ для некоторых $u_i^{(\pm 1)} \in \mathcal{U}_i$. Если скорость $v^0(\cdot)$ постоянна, это сводится к условию $\pm u_i^{(\pm 1)} > \bar{\xi}$, что означает, что робот способен преодолеть неконтролируемые внешние факторы за счёт собственных управляющих усилий.

2) Робот i описывается двумя ОДУ: $m_i \ddot{s}_i = u_i + \xi_i(t, s_i, \dot{s}_i, m_i)$, $\dot{m}_i = -\eta_i(t, s_i, \dot{s}_i, m_i, u_i) \in \mathbb{R}$, где функции $\xi_i(\cdot)$ и $\eta_i(\cdot)$ липшиц-непрерывны. Этот пример модифицирует случай 1) и предполагает колёсные роботы с двигателями внутреннего сгорания; m_i — масса транспортного средства, которая меняется со временем из-за расхода топлива.

Первое уравнение по духу схоже с уравнением из случая 1), но теперь u_i и ξ_i имеют смысл сил. Второе уравнение описывает расход топлива, скорость которого может зависеть от скорости транспортного средства $\dot{s}_i$ и ускорения u_i/m_i [197]. (Неявно предполагается, что запас топлива обеспечивает работу роботов в течение длительного периода времени, который в модели аппроксимируется бесконечным временным горизонтом.)

Пусть $\bar{\alpha}$, $\bar{\xi}$ и $\bar{m}$ — верхние границы для $|\dot{v}^0(t)|$, ξ_i и m_i , соответственно. Тогда (5.11) выполняется (с некоторым $\mu > 0$), если $\pm u_i^{\langle \pm 1 \rangle} > \bar{m} \bar{\alpha} + \bar{\xi}$. Если $v^0(\cdot) = \text{const}$, это, как и ранее, означает, что робот может преодолеть внешние факторы за счёт собственных управляющих усилий.

В примере 1) отсутствует дополнительная переменная z (это можно встроить в формализм (5.4), (5.6), предполагая, что z и $\mathcal{Z}$ тождественно равны нулю), и выполняется условие предп. 5.1.5. Для пункта 2) выполняется условие $z := \{m_i\}_{i=0}^{N-1}$, и i–iii) из условия предп. 5.1.5 выполняются, тогда как iv) фактически касается уравнений $\dot{m}_i = -\eta_i(t, s_i, \dot{s}_i, m_i, u_i)$ и выполняется, если, например, $|\eta_i(t, s_i, \dot{s}_i, m_i, u_i)| \leq A + B|m_i|$ с некоторыми константами A, B .

5.2. Децентрализованный протокол для равномерного саморазмещения

Протокол предписывает формировать управление следующим образом:

$$u_i = u_i^{\langle -\text{sgn } \Sigma_i \rangle}, \quad \text{где} \quad (5.14)$$

$$\Sigma_i := v_i - [v^0 + k(\delta_i^+ + \delta_i^-)]. \quad (5.15)$$

Здесь k — свободный параметр, а $u_i^{\langle \pm 1 \rangle}$ берутся из предп. 5.1.4.

Правая часть уравнения (5.14) скачкообразно меняется при пересечении Σ_i нуля. Это может происходить в ходе непрерывного изменения Σ_i , а также из-за скачков Σ_i . Они могут возникать, когда какой-либо робот i обгоняет другого робота: тогда δ_i^+ сначала стремится к 0, а затем может скачком возрасти

до положительного значения. Решение системы (5.2), замкнутой разрывным регулятором (5.14), (5.15), понимается в смысле Филиппова [91].

5.2.1. Основной теоретический результат

В нём используются $\varepsilon_v, \bar{v}$ из (5.8), Δ_{vis} из предп. 5.1.3 и μ из (5.11).

Теорема 5.2.1. *Предположим, что выполняются условия (5.8), (5.10) и предп. 5.1.3–5.1.5, а коэффициент усиления k в (5.15) выбран так, что*

$$k\Delta_{vis} < \varepsilon_v, \quad 4k\bar{v} < \mu, \quad k > 0. \quad (5.16)$$

Пусть начальное размещение роботов безконфликтно и выполняются следующие условия:

$$v^0(0) + k\delta_i^-(0) < v_i(0) < v^0(0) + k\delta_i^+(0), \quad (5.17)$$

$$v^0(0) - \varepsilon_v < v_i(0) < v^0(0) + \varepsilon_v. \quad (5.18)$$

Тогда траектория замкнутой системы определена для всех $t \geq 0$, и выполняются следующие утверждения:

- i) Роботы достигают равномерного саморазмещения и профиля скорости (5.8) в смысле опр. 5.1.1;*
- ii) Их скорости всегда допустимы: $|v_i(t)| < \bar{v}$;*
- iii) Их размещение остаётся безконфликтным для всех $t \geq 0$;*
- iv) В уравнении (5.1) сходимость происходит с экспоненциальной скоростью;*
- v) Неравенства (5.17) и (5.18) остаются верными в любой момент времени:*

$$\begin{aligned} v^0(t) + k\delta_i^-(t) < v_i(t) < v^0(t) + k\delta_i^+(t), \\ v^0(t) - \varepsilon_v < v_i(t) < v^0(t) + \varepsilon_v \quad \forall t \geq 0, i. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Доказательство этой теоремы приведено в приложении (см. Г.1).

Неравенства (5.16) выполняются для всех достаточно малых $k > 0$. Это можно использовать в качестве ориентира при экспериментальной настройке регулятора.

Согласно (5.9), условия (5.17) и (5.18) выполняются, если роботы запускаются с желаемой скоростью $v_i(0) = v^0(0)$; более того, достаточно лишь $v_i(0) \approx v^0(0)$. Это кажется справедливым и разумным и может рассматриваться — наряду с начальным отсутствием столкновений — как рекомендации по начальному размещению роботов.

Также существует возможность адаптировать $v^0(0)$ к начальной ситуации (например, положить $v^0(0) := v_*$, если все $v_i(0)$ одинаковы и равны v_*), а затем спроектировать $v^0(t)$ при $t > 0$ так, чтобы обеспечить плавный переход к желаемой скорости.

Наконец, условия (5.17) и (5.18) можно обеспечить с помощью предварительного манёвра до того, как закон управления (5.14) будет задействован. Ответственность за предотвращение столкновений после этого лежит на протоколе.

Во вращающейся системе отсчёта из рис. 5.2а условия (5.17) и (5.18) означают, что начальные скорости роботов не являются чрезмерно большими. Философски такое требование действительно необходимо, поскольку в противном случае столкновения и нарушение условия (5.7) могут оказаться неизбежными независимо от закона управления — из-за ограничений на управляющее воздействие в (5.2).

Кроме того, чем ближе два соседних робота друг к другу, тем меньше должна быть скорость; именно это и выражает неравенство (5.17).

Если столкновения между ϱ_i не являются проблемой, условие (5.17) можно ослабить. Это справедливо, если $\varrho_i = \varrho_j$ не обязательно означает аварию в реальной жизни. Например, пусть s_k — полярные углы плоских роботов. Тогда ϱ_k — это образ s_k на единичной окружности, и $\varrho_i = \varrho_j$ не означает аварии, если соответствующие расстояния до начала координат различаются.

Если ограничение (5.7) снимается, условие (5.18) можно опустить.

5.2.2. Информационная связность не требуется изначально

В отличие от большинства исследований по распределённому построению формаций на основе локальных данных, теорема 5.2.1 обосновывает сходимость правила управления в условиях отсутствия начальной информационной

связности команды. В упомянутых исследованиях информационная связность — типичное предварительное условие сходимости; см., например, [15, 56, 57].

Часто просто постулируется, что эта связность сохраняется на бесконечном временном горизонте в той или иной форме — по невыявленной причине. Однако если передача данных зависит от расстояния, выполнение основного закона управления движением может поставить под угрозу это предположение [58].

Поэтому некоторые алгоритмы опираются на начальную связность и блокируют перемещения роботов, которые приводят к разрыву существующих каналов передачи данных; см., например, [59—61]. Однако в таком случае цель управления может стать недостижимой (например, если роботы начинают работу в плотном скоплении и поэтому имеют связь типа «все со всеми», но должны рассредоточиться на столь обширной территории, что расстояние между некоторыми роботами неизбежно превысит радиус связи).

Другой подход сохраняет связность, допуская при этом разрыв осторожно отобранных связей [62—64]. Цена такого решения — высокая вычислительная и коммуникационная нагрузка, а также необходимость осведомлённости о глобальной топологии обмена данными.

Напротив, предложенный протокол создаёт информационную связность «из ничего» — и делает это при минимальных вычислительных затратах, опираясь лишь на локальные данные.

Согласно теореме 5.2.1, метод сходится даже в том случае, если изначально команда состоит из нескольких кластеров, не имеющих информации друг о друге, поскольку промежутки между ними слишком велики ($> \Delta_{\text{vis}}$) для сенсорного контакта; см. рис. 5.3а. Тем временем информационная связность в конечном счёте возникает благодаря сходимости к равномерному распределению, при котором связность обеспечивается условием (5.10); см. рис. 5.3б.

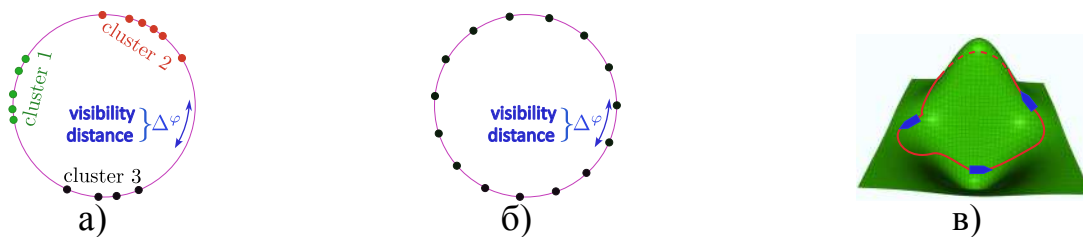


Рисунок 5.3 — (а) Начальное размещение с тремя взаимно «невидимыми» кластерами; (б) Целевое размещение, удовлетворяющее условию (5.10); (в) Дорога на пересечённой местности

5.2.3. Выход из строя и подключение новых членов команды во время выполнения миссии

Замечание 10. Пусть выполнены предположения теоремы 5.2.1, и один или несколько роботов выходят из строя. Тогда вывод теоремы 5.2.1 остаётся верным, если условие (5.10) выполняется с учётом уменьшившегося размера команды N .

Чтобы доказать это, достаточно последовательно сдвигать начало оси времени к моментам потерь и применять теорему 5.2.1. Это возможно, поскольку её предположение о начальном отсутствии столкновений остаётся верным благодаря пункту **iii)** теоремы 5.2.1, а условия (5.17) и (5.18) сохраняются благодаря пункту **v)** теоремы 5.2.1. Следует также отметить, что для любого из оставшихся роботов i значение $\pm\delta_i^\pm$ либо не изменяется, либо увеличивается из-за выхода из строя других роботов.

Замечание 10 остаётся верным даже в том случае, если выход роботов из строя нарушает ранее достигнутую информационную связность команды (если таковая имелаась).

Обратная операция — добавление новых членов — требует большей осторожности, чтобы исключить столкновения между «новичками» и «старожилами». Любой «новичок» должен быть размещён в такой точке и с такой начальной скоростью, чтобы оставалось достаточно пространства для избежания столкновений с учётом скоростей, уже достигнутых «старожилами».

Для упрощения рассуждений предположим, что добавляется один новичок (это распространяется на случай множества новичков, если они добавляются поочерёдно). Объединение теоремы 5.2.1 с упомянутым выше приёмом сдвига начала оси времени приводит к следующему результату.

Замечание 11. Пусть выполнены предположения теоремы 5.2.1, и в некоторый момент времени t_* к команде присоединяется дополнительный робот с меткой N . Предположим, что выполняются следующие утверждения:

a) Начальная скорость новичка не сильно отклоняется от целевой:

$$|v_N(t_*) - v^0(t_*)| < \varepsilon_v;$$

b) Место появления $s_N(t_*+)$ выбрано так, что имеется достаточно свободного пространства как впереди, так и позади:

$$1) \quad v^0(t_*) + k\delta_N^-(t_*+) < v_N(t_*) < v^0(t_*) + k\delta_N^+(t_*+) \text{ и}$$

- 2) неравенства в первой строке (5.19) выполняются при $t = t_* +$ для ближайшего робота i как впереди, так и позади новичка.

Тогда вывод теоремы 5.2.1 остаётся в силе.

Чтобы выполнить условия **a)** и **b.1)**, достаточно запустить новичка с целевой скоростью $v^0(t_*)$. Тогда условие **b.2)** выполняется, если дополнительный робот размещается посередине между двумя последовательными «старожилами» таким образом, что их скорости относительно $v^0(t_*)$ меньше, чем $\frac{k}{2}\delta_i^+$. Рано или поздно условие **b.2)** будет выполнено благодаря (5.1) и теореме 5.2.1.

Обеспечение выполнения условия **b.2)** при включении новичка в миссию может потребовать возможности оценивать относительные скорости соседних роботов, которые в данный момент проходят мимо.

5.3. Иллюстративные примеры

Цель данного раздела — наметить некоторые способы применения теоремы 5.2.1. При этом в детали, специфичные для отдельных сценариев, вдаваться не будем, чтобы лучше подчеркнуть саму процедуру применения.

Представленные примеры относятся к барьерному покрытию — одной из ключевых задач для различных приложений, таких как обеспечение безопасности, экологического мониторинга, защиты критически важных ресурсов, охранное наблюдение и обнаружение нарушителей, и это лишь некоторые из них [194, 198, 199].

Концепция барьерного покрытия касается способности сети надёжно обнаруживать нарушителей, пытающихся пересечь заданную линию. С развитием мобильных сенсорных роботизированных платформ их всё чаще используют для повышения качества барьерного покрытия и снижения затрат на развёртывание сети [199].

5.3.1. Сканирующее покрытие одномерного барьера, изгибающегося в трёхмерном пространстве

Группа из N мобильных роботов должна выполнять мониторинг, перемещаясь с заданной скоростью $v_{\text{des}} > 0$, друг за другом, по заданной замкнутой траектории — например, по узкой дороге, исключаяющей обгон; см. рис. 5.3в. Равномерное распределение роботов по длине пути выгодно для наилучшего обнаружения объектов пытающихся пересечь этот путь.

Роботы не используют устройства связи и не осведомлены о размере команды N . Датчики снабжают каждого робота информацией о расстоянии по дороге до ближайшего транспортного средства как впереди, так и позади, если это расстояние не превышает заданного порога R_{sen} .

Любой робот i имеет доступ к своей собственной скорости движения по дороге v_i , которая не должна превышать некоторого «безопасного» значения $\bar{v} > v_{\text{des}}$.

Необходимо разработать правило управления таким образом, чтобы, будучи индивидуально запущенным на каждом роботе, оно приводило группу к желаемой скорости и равномерному интервалу между роботами, исключая при этом столкновения между роботами и «небезопасные» скорости.

Дорога пролегает по пересечённой местности и выглядит как замкнутая регулярная кривая, змеевидно изгибающаяся в 3D-пространстве.

Пусть $\mathbf{r}(s)$ — её естественное параметрическое представление, где s — длина дуги, $\mathbf{r}(s \pm p) = \mathbf{r}(s)$, а $p > 0$ — периметр кривой. Предполагается, что заранее установленная система боковой стабилизации удерживает любого робота i на дороге; поэтому его местоположение задаётся криволинейной абсциссой s_i . Скорость движения по дороге v_i и ускорение равны $\dot{s}_i$ и $\ddot{s}_i$, соответственно. Карта дороги, высотный профиль, длина p и свойства (например, коэффициент трения поверхности) неизвестны. Условия эксплуатации могут непредсказуемо меняться со временем (из-за, например, порывов ветра и т. д.).

Ускорение робота в основном определяется управляемой силой тяги, силой уклона дороги $m_i g \sin \gamma(s)$, силой аэродинамического сопротивления F_{air} и силой сопротивления качению $m_i g f_r \cos \gamma(s)$ [200]. Здесь g — ускорение свободного падения, $\gamma(s)$ — угол уклона дороги, m_i — масса робота i , а $f_r > 0$ — коэффициент сопротивления качению.

Сила F_{air} обычно выражается как $F_{\text{air}} = \frac{1}{2} c_{\text{air}} S \rho v_{\text{rel-air}}^2$, где c_{air} — коэффициент аэродинамического сопротивления, ρ — плотность воздуха, S — лобовая площадь корпуса робота, а $v_{\text{rel-air}}$ — скорость набегающего воздушного потока относительно робота [200].

Только что упомянутые параметры и переменные могут зависеть от множества факторов, которые на практике могут быть существенно неопределёнными, непостоянными и непредсказуемыми. Поэтому в принимаемой модели они не конкретизируются, как и схема транспортного средства, физическая управляющая переменная и архитектура трансмиссии. Вместо этого принимаются следующие допущения:

р.1. Движение робота i подчиняется уравнению вида

$$\ddot{s}_i(t) = a_i(t, s_i, \dot{s}_i, \xi_i) + b_i(t, s_i, \dot{s}_i, u_i, \xi_i), \quad u_i \in U, \quad (5.20)$$

где $u_i = u_i(t)$ — управляющее воздействие, $U \subset \mathbb{R}^k$ — множество допустимых управлений, экзогенное воздействие ξ_i генерируется посредством уравнений вида (5.4) и (5.6) (где $P := \{s_i\}_{i=0}^{N-1}$, $V := \{\dot{s}_i\}_{i=0}^{N-1}$), функции $a_i(\cdot)$ и $b_i(\cdot)$ липшиц-непрерывны, а замена $s_i \mapsto s_i \pm p$ не влияет на их значения и на значения $\mathcal{Z}(\cdot)$ и $\Xi_i(\cdot)$ из (5.4), (5.6);

р.2. Существуют известные управления $u^{(\pm 1)} \in U$ такие, что в любых допустимых условиях $u^{(+1)}$ и $u^{(-1)}$ ускоряют и замедляют робота, соответственно: существует $\mu > 0$ такое, что

$$\pm \left[a_i(t, s_i, \dot{s}_i, \xi_i) + b_i(t, s_i, \dot{s}_i, u^{(\pm 1)}, \xi_i) \right] \geq \mu > 0 \quad (5.21)$$

для любых $t \geq 0$, $s_i, \dot{s}_i \in [-\bar{v}, \bar{v}]$, любых ξ_i , заданных уравнениями (5.4) и (5.6), и любых допустимых неопределённостей $\lambda(\cdot)$, λ_0 ;

р.3. Функции $\mathcal{Z}(\cdot)$ и $\Xi_i(\cdot)$ из (5.4) и (5.6) удовлетворяют условиям ii) и iv) из предп. 5.1.5.

В уравнении (5.20) $b_i(\cdot)$ и $a_i(\cdot)$ учитывают силу тяги и совокупный эффект всех остальных сил, соответственно.

Если доступны конкретные выражения для $a_i(\cdot)$, $b_i(\cdot)$ (и $\mathcal{Z}(\cdot)$, $\Xi_i(\cdot)$ из (5.4), (5.6)), то и (5.21), и μ можно детализировать в терминах, связанных с этими выражениями (например, коэффициентами c_r, f_r , оценкой уклона дороги $\bar{\gamma} \geq |\gamma(s)| \forall s$ и т. д.). Однако опустим это, поскольку сейчас цель — обсудить применение теоремы 5.2.1, подчеркнув несущественность указанных деталей в данном вопросе.

Предположение 5.3.1. Роботы изначально занимают разные точки на дороге и не движутся.

Применим протокол управления (5.14), где в правой части $u_i^{\langle -\text{sgn } \Sigma_i \rangle} \mapsto u^{\langle -\text{sgn } \Sigma_i \rangle}$, $\Sigma_i := \dot{s}_i - v_{\text{des}} - k [\delta_i^+ + \delta_i^-]$, а $\delta_i^\pm$ — знаковое расстояние по дороге от робота i до ближайшего робота впереди/позади, если это расстояние не превышает дальности видимости R_{sen} . В противном случае $\delta_i^+ := R_{\text{sen}}$, а $\delta_i^- := -R_{\text{sen}}$.

Рассматриваемый сценарий сводится к сценарию из раздела 5.1 с $\Delta_{\text{vis}} := R_{\text{sen}}$, $v^0(t) := v_{\text{des}} \forall t \geq 0$, и $\varepsilon_v := \bar{v} - v_{\text{des}}$ в (5.8).

Тогда теорема 5.2.1 непосредственно влечёт следующее.

Предложение 5.3.2. *Предположим, что выполнено предположение 5.3.1 и никакие соседние роботы не теряют сенсорного контакта при равномерном размещении на дороге: $p/N < R_{\text{sen}}$. Пусть коэффициент усиления k выбран так, что*

$$0 < k < \min \left\{ \frac{\bar{v} - v_{\text{des}}}{R_{\text{sen}}}; \frac{\mu}{4\bar{v}} \right\}. \quad (5.22)$$

Тогда решение замкнутой системы определено для всех $t \geq 0$, и для рассматриваемых роботов выполняются следующие утверждения:

- i) Они достигают равномерного распределения вдоль дороги и желаемой скорости, т.е. $\delta_i^\pm(t) \rightarrow \pm \frac{p}{N}$, $\dot{s}_i(t) \rightarrow v_{\text{des}}$ при $t \rightarrow \infty$, причём сходимость происходит с экспоненциальной скоростью;
- ii) Они не сталкиваются друг с другом (т. е. не обгоняют друг друга) и движутся безопасно: $|\dot{s}_i(t)| < v_{\text{safe}} \forall t \geq 0$.

Условие (5.22) выполняется для всех достаточно малых $k > 0$.

Благодаря замечанию 10, утверждение 5.3.2 остаётся верным, если группа один или несколько раз теряет членов, продолжая при этом выполнять протокол, при условии, что $p/N < R_{\text{sen}}$ для окончательного размера команды N , и именно этот размер учитывается в пункте i). Замечание 11 о подключении дополнительных членов команды также может быть применено в текущем контексте.

5.3.2. Сканирующее покрытие удалённого барьера

По-прежнему рассматривается команда роботов и дорога из раздела 5.3.1. Теперь группа должна обнаруживать нарушителей на большом расстоянии от точечного неподвижного объекта; см. рис. 5.4а. В этом случае интересны проникновения через окружность большого радиуса с центром на объекте. Между тем используемая дорога близко и нерегулярно огибает объект; сопоставление размещений по дороге и по барьеру дано на рис. 5.4б и 5.4.



Рисунок 5.4 — Равномерное распределение: (а) вдоль дороги и (б) вдоль барьера

Следовательно, может не иметь особого смысла стремиться к равномерной плотности распределения роботов вдоль дороги; см. рис. 5.4а.

Разумнее распределить их так, чтобы в проекции на горизонтальную плоскость H их радиус-векторы относительно объекта делили плоскость на равноугольные секторы; см. рис. 5.4б. Также может быть выгодно постоянно перемещать роботов вдоль дороги сложным, но синхронизированным образом.

Ширина дороги настолько мала, что роботы не могут обгонять друг друга; их скорость движения по дороге не должна превышать заданного значения $\bar{v} > 0$.

Далее под «проекцией» понимается сокращение для «ортогональной проекции на горизонтальную плоскость H ».

Примем следующее.

Предположение 5.3.3. Выполняются следующие утверждения:

- i) Проекция Γ дороги является жордановой кривой;
- ii) Касательная к дороге нигде не является вертикальной;
- iii) Проекция $p(t)$ подвижного объекта всегда находится внутри Γ ;

- iv) В любой момент времени любой горизонтальный луч с началом в точке $\mathbf{p}(t)$ пересекает Γ под ненулевым углом $\psi \in (0, \pi)$.

Из условий i) и iv) следует, что этот луч пересекает Γ только один раз; из условий i) и ii) — что любая вертикальная прямая пересекает Γ не более одного раза.

Напомним, что $\mathbf{r}(s)$ обозначает естественное параметрическое представление дороги.

Выберем и фиксируем направление $\vec{d}$ в плоскости H и обозначим через $\varrho(s)$ проекцию $\mathbf{r}(s)$. При заданном $\mathbf{p}(t)$ в момент времени t любое местоположение $\mathbf{r}(s)$ на дороге можно идентифицировать по полярному углу $\varphi(s, t)$ вектора $\varrho(s) - \mathbf{p}(t)$ относительно $\vec{d}$ — благодаря предположению 5.3.3. Тогда местоположения роботов можно однозначно охарактеризовать полярными углами:

$$\varphi_i(t) := \varphi[s_i(t), t], \quad i = 0, \dots, N - 1. \quad (5.23)$$

Необходимо достичь равномерного интервала между этими углами и заданного профиля угловой скорости $\omega^0(\cdot)$ в смысле определения 5.1.1.

Что касается сенсорных возможностей, теперь каждый робот i наделяется двумерной горизонтальной правой декартовой системой координат F_i , прикреплённой к его корпусу, так, что ось абсцисс сонаправлена с проекцией вектора скорости робота. В системе F_i робот имеет доступ к относительным координатам проекций объекта и любого робота, расстояние по дороге до которого не превышает заданного значения R_{sen} .

Кроме того, робот измеряет угловую скорость ω_i , с которой вращается F_i .

Обозначим через ρ_i проекцию робота i , а через $\varphi_i^\pm \in (0, 2\pi]$ — величину угла между направлением от $\mathbf{p}$ к ρ_i и ближайшим по углу направлением от $\mathbf{p}$ к другому роботу. Эта величина отсчитывается против часовой стрелки для φ_i^+ и по часовой стрелке для φ_i^- .

Также выберем параметр $\Delta_{\text{vis}} \in (0, 2\pi)$ и положим:

$$\delta_i^+ := \min\{\varphi_i^+, \Delta_{\text{vis}}\}, \quad \delta_i^- := -\min\{\varphi_i^-, \Delta_{\text{vis}}\}. \quad (5.24)$$

Согласно приведённым выше предположениям, робот i может вычислить пеленг α_i точки $\mathbf{p}$ в системе F_i и значения $\delta_i^\pm$, если Δ_{vis} достаточно мал (см. замечание 12).

Предположения **р.1**, **р.2** из раздела 5.3.1 по-прежнему принимаются и используются $u^{\langle \pm 1 \rangle}$ из **р.2**. По сути, предлагаемый закон управления

воспроизводит (5.14) и (5.15):

$$u_i = u^{\langle -\text{sgn } \Sigma_i \rangle}, \quad \Sigma_i := \dot{\alpha}_i + \varpi_i - \omega^0 - k(\delta_i^+ + \delta_i^-). \quad (5.25)$$

Здесь $\dot{\alpha}_i$ можно оценить посредством численного дифференцирования $\alpha_i(t)$ по времени; хотя допустим любой способ получения доступа к $\dot{\alpha}_i$.

Для обсуждения основного результата понадобятся следующие обозначения:

- $d_{\min} > 0$ и $d_{\max} > 0$ — нижняя и верхняя границы расстояния, отделяющего $\mathbf{p}(t)$ от точек кривой Γ ;
- $\psi_{\min} \in (0, \pi/2]$ — граница для угла из пункта iv) предположения 5.3.3: $\psi \in [\psi_{\min}, \pi - \psi_{\min}]$;
- $\gamma_{\max} \in [0, \pi/2)$ — верхняя граница абсолютного значения уклона дороги γ ;
- $v_{\max}^p$ и $a_{\max}^p$ — верхние границы горизонтальной скорости $\|\dot{\mathbf{p}}\|$ и ускорения $\|\ddot{\mathbf{p}}\|$ объекта, соответственно;
- $\kappa_{\max}$ — верхняя граница кривизны κ кривой Γ ;
- $\lambda_{\max}$ — верхняя граница абсолютного значения знаковой вертикальной кривизны λ дороги, которая представляет собой производную $\lambda(s)$ уклона $\gamma(s)$ по расстоянию вдоль дороги s ;
- $\vec{e}(\beta)$ — горизонтальный единичный вектор с полярным углом β относительно $\vec{d}$.

Определение 5.3.4. Термин *реализуемый сценарий* относится к комбинации расположения дороги, движения объекта и первичных неопределённостей в (5.3), для которых соблюдаются все ранее установленные границы.

Обратимся к (5.23), положим $\eta_i(t) := \|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_i(t)\|$ и введём правую систему координат Френе для Γ , ориентированную так, чтобы $\mathbf{p}(t)$ находился слева при движении вдоль Γ в направлении оси абсцисс. Пусть $\psi_i(t)$ обозначает полярный угол вектора $\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}(t)$ в этой системе координат.

Лемма 5.3.5. *i) В момент времени t расстояние по дороге L_{road} между точками дороги $\mathbf{r}(s_*)$ и $\mathbf{r}(s_+)$ не превышает*

$$\frac{d_{\max}}{\sin \psi_{\min}} |\varphi(s_*, t) - \varphi(s_+, t)| \sqrt{1 + \sin^2 \gamma_{\max}}. \quad (5.26)$$

ii) Для любого робота i выполняются следующие уравнения:

$$\dot{\varphi}_i = \eta_i^{-1} [\dot{s}_i \sin \psi_i \cos \gamma - \langle \dot{\mathbf{p}}; \vec{e}[\varphi_i + \pi/2] \rangle], \quad (5.27)$$

$$\eta_i \ddot{\varphi}_i = [\ddot{s}_i + \Upsilon] \sin \psi_i \cos \gamma, \quad \text{где} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \Upsilon := & -\lambda \dot{s}_i^2 \operatorname{tg} \gamma - \dot{s}_i^2 \left[2 \frac{\sin \psi_i}{\eta_i} - \varkappa \right] \cos \gamma \operatorname{ctg} \psi_i \\ & + 2\eta_i^{-1} \dot{s}_i \langle \dot{\mathbf{p}}; \vec{e}[\varphi_i] \rangle - 2 \frac{\langle \dot{\mathbf{p}}; \vec{e}[\varphi_i] \rangle \langle \dot{\mathbf{p}}; \vec{e}[\varphi_i + \pi/2] \rangle}{\eta_i \sin \psi_i \cos \gamma} \\ & + 2\eta_i^{-1} \dot{s}_i \langle \dot{\mathbf{p}}; \vec{e}[\varphi_i + \pi/2] \rangle \operatorname{ctg} \psi_i - \frac{\langle \ddot{\mathbf{p}}; \vec{e}[\varphi_i + \pi/2] \rangle}{\sin \psi_i \cos \gamma}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Доказательство этой технической леммы приведено в приложении (см. Г.2).

Что касается реализуемости миссии, отметим, что, как и ранее, любой робот должен «видеть» своих соседей, когда команда распределена так, как требуется. Поскольку это означает равномерный интервал между углами φ_i , это приводит к требованию, чтобы в силу (5.26) расстояние по дороге между двумя точками на дороге находилось в пределах дальности видимости R_{sen} , когда угловой зазор между ними равен $2\pi/N$.

Это приводит к следующему почти неизбежному условию:

$$\frac{2\pi}{N} < \frac{R_{\text{sen}}}{d_{\text{max}}} \frac{\sin \psi_{\min}}{\sqrt{1 + \sin^2 \gamma_{\max}}}. \quad (5.30)$$

Разумно предположить, что в любом реализуемом сценарии ни один робот i не теряет управления над собственной позицией на дороге s_i , т. е.: **1)** любой знак $\dot{s}_i$ возможен независимо от допустимой скорости объекта; **2)** робот i может по своему выбору ускорять и замедлять s_i .

Поскольку робот i может столкнуться с ситуацией, когда $\sin \psi_i \cos \gamma = \sin \psi_{\min} \cos \gamma_{\max}$ и $\langle \dot{\mathbf{p}}; \vec{e}[\varphi_i + \pi/2] \rangle = v_{\text{max}}^p$, а

$$\operatorname{sgn} \dot{\varphi}_i = \operatorname{sgn} [\dot{s}_i \sin \psi_i \cos \gamma - \langle \dot{\mathbf{p}}; \vec{e}[\varphi_i + \pi/2] \rangle]$$

согласно (5.27), и скорость робота по дороге не превышает $\bar{v}$, то из 1) следует, что

$$\bar{v} \sin \psi_{\min} \cos \gamma_{\max} > v_{\text{max}}^p. \quad (5.31)$$

Что касается 2), аналогичным образом заключаем, что абсолютное значение Υ в (5.28) должно быть меньше, чем ускорение по дороге $\ddot{s}_i$, которое робот «определённо может реализовать» в любых условиях. В силу (5.21) это ускорение

задаётся величиной μ . Следовательно, $|\Upsilon|$ должно быть меньше μ . Чтобы избежать громоздких формул, будем действовать на основе следующей простой, хотя и достаточно грубой оценки $|\Upsilon|$:

$$|\Upsilon| \stackrel{(5.29)}{\leq} \Upsilon_+ := \bar{v}^2 \left[\lambda_{\max} \operatorname{tg} \gamma_{\max} + 2 \frac{\cos \psi_{\min}}{d_{\min}} + \varkappa_{\max} \operatorname{ctg} \psi_{\min} \right] + 2\bar{v}v_{\max}^p \frac{1 + \operatorname{ctg} \psi_{\min}}{d_{\min}} + \frac{1}{\sin \psi_{\min} \cos \gamma_{\max}} \left[2 \frac{(v_{\max}^p)^2}{d_{\min}} + a_{\max}^p \right].$$

Тогда требование 2) сводится к

$$\mu > \Upsilon_+. \quad (5.32)$$

Предполагаем, что оба условия (5.31) и (5.32) выполняются.

Аналогичные рассуждения, а также формулы (5.27), (5.28) и оценка $|\Upsilon| \leq \Upsilon_+$ показывают, что угловая скорость $\dot{\phi}_i$ и ускорение $\ddot{\phi}_i$, реализуемые в любом допустимом сценарии, удовлетворяют следующим неравенствам:

$$|\dot{\phi}_i| \leq v_{\text{safe}}^s := d_{\max}^{-1} [\bar{v} \sin \psi_{\min} \cos \gamma_{\max} - v_{\max}^p],$$

$$|\ddot{\phi}_i| \leq \aleph := \frac{\mu - \Upsilon_+}{d_{\max}} \sin \psi_{\min} \cos \gamma_{\max}. \quad (5.33)$$

Справедливо требовать, чтобы желаемая угловая скорость удовлетворяла (5.33):

$$\sup_{t \geq 0} |\omega^0(t)| < v_{\text{safe}}^s, \quad \sup_{t \geq 0} |\dot{\omega}^0(t)| < \aleph. \quad (5.34)$$

Предложение 5.3.6. Пусть выполняются условия (5.30)–(5.32) и (5.34), где v_{safe}^s и $\aleph$ определены в (5.33).

Предположим, что предположения 5.3.1 и 5.3.3 выполняются и $\omega^0(0) = 0$, что согласуется с последним утверждением в предположении 5.3.1.

Пусть параметры Δ_{vis} и k закона управления выбраны так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\frac{2\pi}{N} < \Delta_{\text{vis}} \leq \frac{R_{\text{sen}}}{d_{\max}} \frac{\sin \psi_{\min}}{\sqrt{1 + \sin^2 \gamma_{\max}}}, \quad (5.35)$$

$$0 < k < \left[v_{\text{safe}}^s - \sup_{t \geq 0} |\omega^0(t)| \right] / \Delta_{\text{vis}}, \quad (5.36)$$

$$4kv_{\text{safe}}^s < d_{\max}^{-1} [\mu - \Upsilon_+] \sin \psi_{\min} \cos \gamma_{\max} - \sup_{t \geq 0} |\dot{\omega}^0(t)|. \quad (5.37)$$

Тогда решение замкнутой системы определено для всех $t \geq 0$, и выполняются следующие утверждения:

- i) В терминах выходных углов (5.23) роботы достигают равномерного самораспределения и желаемого временного профиля угловой скорости (см. определение 5.1.1, где $p := 2\pi$, $v^0(\cdot) := \omega^0(\cdot)$ и сходимость в (5.1) происходит с экспоненциальной скоростью);
- ii) Роботы не сталкиваются друг с другом (т. е. не обгоняют друг друга) и не движутся быстрее разрешённого: $|\dot{s}_i(t)| < \bar{v} \forall t \geq 0$.

Согласно (5.30), существует Δ_{vis} , удовлетворяющий (5.35). Все достаточно малые $k > 0$ удовлетворяют (5.36), (5.37), поскольку соответствующие правые части положительны в силу (5.34).

Замечание 12. Благодаря (5.35), величины (5.24) могут быть вычислены любым роботом i , и поэтому закон управления (5.25) корректно определён.

Действительно, если $|\varphi(s_*, t) - \varphi(s_+, t)| < \Delta_{\text{vis}}$ для двух точек $r(s_*)$ и $r(s_+)$ на дороге, то расстояние по дороге L_{road} между ними меньше дальности видимости R_{sen} — в силу пункта i) леммы 5.3.5 и (5.35).

Доказательство. Пусть θ_i — полярный угол оси абсцисс системы F_i относительно вектора $\vec{d}$, выбранного для определения углов s_i . Тогда $\varpi_i = \dot{\theta}_i$, а $\theta_i(t) + \alpha_i(t) + \pi$ — это полярный угол φ_i вектора $\varrho[s_i(t)] - p(t)$ относительно $\vec{d}$. Таким образом, $\varphi_i = \theta_i(t) + \alpha_i(t) + \pi$ и $\dot{\varphi}_i = \dot{\theta}_i + \dot{\alpha}_i = \varpi_i + \dot{\alpha}_i$, что преобразует (5.25) в (5.14), (5.15) (с точностью до обозначений).

Отметим, что для $\bar{v} := v_{\text{safe}}^\varphi$ формула (5.8) выполняется с $\varepsilon_v := v_{\text{safe}}^s - \sup_{t \geq 0} |\omega^0(t)|$, где $\varepsilon_v > 0$ в силу (5.34).

Кроме того,

$$|\dot{\varphi}_i| < v_{\text{safe}}^\varphi \xrightarrow{(5.27)} |\dot{s}_i| < \frac{v_{\text{max}}^p + d_{\text{max}} v_{\text{safe}}^\varphi}{\sin \psi_{\min} \cos \gamma_{\max}} \stackrel{(5.33)}{\leq} \bar{v}. \quad (5.38)$$

Обращаясь к (5.20) и (5.28), видим, что

$$\ddot{\varphi}_i = \eta_i^{-1} [a_i(\dots) + b_i(\dots) + \Upsilon] \sin \psi_i \cos \gamma.$$

Следовательно, $\ddot{s}_i$ подчиняется уравнению вида (5.20), где слагаемые в правой части модифицированы следующим образом:

$$\begin{aligned} a_i^{\text{new}}(\dots) &:= \eta_i^{-1} a_i(\dots) \sin \psi_i \cos \gamma, \\ b_i^{\text{new}}(\dots) &:= \eta_i^{-1} [b_i(\dots) + \Upsilon] \sin \psi_i \cos \gamma. \end{aligned}$$

Здесь неявно предполагается, что в правой части аргументы $s_i, \dot{s}_i$ и ψ_i, γ вычисляются из $\varphi_i, \dot{\varphi}_i, t$, тогда как траектория $p(\cdot)$ объекта считается заданной. Кроме того,

$$\begin{aligned} \pm [a_i^{\text{new}}(\dots) + b_i^{\text{new}}(\dots)|_{u=u^{(\pm 1)}}] &\stackrel{(5.21)}{\geq} \eta_i^{-1} [\mu - \Upsilon_+] \sin \psi_i \cos \gamma \\ &\geq d_{\max}^{-1} [\mu - \Upsilon_+] \sin \psi_{\min} \cos \gamma_{\max} \stackrel{(5.34)}{>} \sup_{t \geq 0} |\dot{v}^0(t)|. \end{aligned}$$

Таким образом, видим, что неравенства (5.11) выполняются, где μ заменено на

$$d_{\max}^{-1} [\mu - \Upsilon_+] \sin \psi_{\min} \cos \gamma_{\max} - \sup_{t \geq 0} |\dot{v}^0(t)| \stackrel{(5.34)}{>} 0.$$

Также (5.36) влечёт за собой (5.16) при $\bar{v} := v_{\text{safe}}^{\varphi}$, тогда как (5.17) и (5.18) выполняются в силу предположения 5.3.1 и того факта, что $\omega^0(0) = 0$. Следовательно, теорема 5.2.1 даёт **i)** и то, что $|\dot{\varphi}_i(t)| < v_{\text{safe}}^{\varphi}$ и $\varphi_i(t) \neq \varphi_j(t) \forall i \neq j$ для всех $t \geq 0$. Тогда $|\dot{s}_i(t)| < \bar{v}$ в силу (5.38), и распределение роботов всегда бесстолкновительно, поскольку в противном случае $\varphi_i(t) = \varphi_j(t)$ для некоторых $i \neq j$ в момент первого столкновения. Таким образом, **ii)** также верно. $\square$

5.4. Тесты компьютерного моделирования

В тестах размер команды $N = 30$, $R_{\text{sen}} = 5,0$ м, $v_{\text{des}} = 1,0$ м/с, $v_{\text{safe}} = 4,0$ м/с, $u^{(\pm 1)} = \pm 12,5$ кг · м/с², $k = 3,43$ с⁻¹. Трёхмерный путь задаётся параметрическим представлением:

$$x(\alpha) = R(\alpha) \cdot \cos \alpha, y(\alpha) = R(\alpha) \cdot \sin \alpha, z(\alpha) = \sin(3\alpha), \quad (5.39)$$

с параметром α .

Здесь $R(\alpha)$ — 2π -периодический C^1 -сплайн второго порядка, построенный так, чтобы обеспечить заранее заданные значения $R_k = R[2\pi k/n]$, $k = 0, \dots, n-1$; в тестах $n = 15$ и $(R_0, \dots, R_{14}) = (0,52, 0,95, 0,77, 0,28, 0,22, 0,69, 0,17, 0,39, 0,62, 0,41, 0,0, 0,88, 0,88, 0,3, 0,59)$. (Эти значения взяты из равномерного распределения от 1,5 м до 6,0 м.)

Можно показать, что в этом случае любой робот «видит» другого робота только если разрыв в расстоянии между ними $\lesssim 27\%$ от общей длины пути.

Измерения расстояния по дороге искажены независимыми одинаково распределёнными шумами, равномерно распределёнными на отрезке $[-0,1^\circ, 0,1^\circ]$, путём добавления их к истинному значению параметра α_i из (5.39), соответствующего местоположению робота i .

Уравнения движения взяты в виде:

$$m_i \ddot{s}_i(t) = u_i + \xi_i \cdot a(t, \alpha_i) + (1 - \xi_i) \cdot b(t, \alpha_i) + F_g + F_r + F_{\text{air}}, \quad (5.40)$$

где m_i — масса робота i , величины ξ_i равномерно и независимо распределены на отрезке $[0,1]$, а

$$\begin{aligned} a(t, \alpha_i) &= 5 [\cos(3\alpha_i) + 0,5 \sin \alpha_i + 0,005t], \\ b(t, \alpha_i) &= 5 [-\cos(3\alpha_i) + 0,5 \sin \alpha_i - 0,005 \cdot t] \end{aligned}$$

используются для моделирования случайных изменений условий движения.

Кроме того: $F_g = m_i g \sin \gamma(s)$ — сила, обусловленная уклоном дороги; $F_r = m_i g f_r \cos \gamma(s)$ — сила сопротивления качению; $F_{\text{air}} = \frac{1}{2} c_{\text{air}} \rho S v_{\text{rel-air}} |v_{\text{rel-air}}|$ — сила аэродинамического сопротивления, где $v_{\text{rel-air}}$ — относительная скорость ветра в проекции на направление движения.

В тестах: $f_r = 0,1$; $\frac{1}{2} c_{\text{air}} \rho = 6 \cdot \pi^{-1} \approx 1,91$; направление ветра постоянно, а его скорость равна 5,0 м/с; лобовая площадь S корпуса робота i взята пропорционально его массе: $S_i = 0,04\pi m_i$.

Массы m_i случайным образом выбираются из равномерного распределения от 0,7 кг до 1,3 кг.

На рисунках роботы изображены в виде жирных точек, а дорога показана зелёным цветом; более массивные роботы показаны точками большего размера.

Рис. 5.5 относится к сценарию из раздела 5.3.1 и иллюстрирует поведение предложенного закона управления и одного из недавно разработанных алгоритмов адаптивного круиз-контроля [180]; отдельные подрисунки 5.5а, 5.5б, 5.5в показывают сравниваемые режимы. Интерес к последнему частично обусловлен тем, что этот алгоритм развивает и улучшает ряд идей, типичных для рассматриваемой области исследований. Значения параметров этого алгоритма адаптированы к рассматриваемому сценарию и приняты равными $\lambda = 0,5$ м, $g_{\text{max}} = 10,0 \text{ с}^{-1}$, $\gamma = 20,0$ м и $k = 11,0 \text{ с}^{-1}$.

Траектория задаётся формулой (5.39), где последняя формула изменена на $z(\alpha) = 0$, так что траектория является плоской.

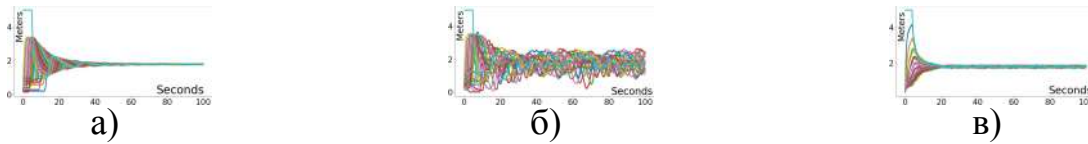


Рисунок 5.5 — Угловые разрывы между роботами: (а) Алгоритм из [180], без ветра; (б) Алгоритм из [180], скорость ветра равна 7,5 м/с; (с) Предложенный закон управления, скорость ветра равна 7,5 м/с

Команда состоит из $N = 20$ роботов с $R_{\text{sen}} = 5,0$ м, $u^{(\pm 1)} = \pm 25,0$ кг · м/с², при этом $k = 3,43$ с⁻¹ в (5.15) и $v_{\text{des}} = 1,0$ м/с, $v_{\text{safe}} = 4,0$ м/с. Уравнения движения (5.40) модифицированы путём исключения второго и третьего слагаемых в правой части. Остальные слагаемые определяются так же, как описано после (5.40) (с той лишь разницей, что теперь скорость ветра либо равна нулю, либо составляет 7,5 м/с). Поскольку метод из [180] не определён при отсутствии связности графа информационного потока (в отличие от предложенного закона управления), роботизированная команда начинает работу в ситуации, когда граф связан.

Согласно рис. 5.5а, метод из [180] работает очень хорошо в условиях отсутствия ветра и обеспечивает равномерное распределение роботов по круговой траектории с высокой точностью.

В ветреную погоду ветер воздействует на каждого робота под углом, который меняется вдоль извилистой траектории, даже если вектор скорости ветра постоянен. Это означает, что сила аэродинамического сопротивления (и её проекция на направление траектории) также периодически меняется.

В свою очередь, на рис. 5.5б можно наблюдать значительное снижение точности формирования равномерного распределения: для всех межроботных разрывов возникают систематические ошибки $\approx 1,0$ м.

Рис. 5.5в показывает, что в тех же ветреных условиях предложенный закон управления не испытывает каких-либо заметных затруднений.

По сравнению с рис. 5.5а (где ветер отсутствует), переходный процесс даже короче, а равномерное самораспределение роботов достигается с высокой точностью, которая сопоставима и лишь немного хуже, чем на рис. 5.5а. Это подтверждает репутацию регуляторов скользящего режима как высокоустойчивых к возмущениям и шумам.

5.5. Заключение

В главе представлен распределённый алгоритм, основанный на применении скользящего режима управления и приводящий однородную команду анонимных мобильных роботов без средств связи к равномерной замкнутой цепи в терминах циклической выходной переменной и обеспечивающий заданный временной профиль скорости изменения этого выхода. Рассмотрены роботы со сложной динамикой второго порядка, неопределённостями, априорными ограничениями на скорости и управления и доступом только к локальным данным. Протокол не требует начальной информационной связности, устойчив к потерям и вставкам роботов и исключает столкновения; сходимости обоснована строго и подтверждена моделированием, в том числе на задачах заметающего покрытия одномерного барьера в 3D.

В случае обнаружения чаттеринга при практической реализации скользящего режима для его устранения возможно применение разработанного ранее арсенала методов (фильтры нижних частот, скользящие режимы высшего порядка, сглаживание разрывов и др.) [201—203].

Глава завершает линию диссертации от заметающего покрытия коридоров и одномерных цепных протоколов к замкнутым цепям при более реалистичной динамике. Планируемое развитие материала данной главы включает обобщение на выходы более высокого порядка, детализацию моделей из раздела 5.3, эксперименты на физических роботах и случай зависимых от ситуации значений экстремальных управлений $u_i^{\langle \pm 1 \rangle}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа посвящена решению актуальных задач распределённого управления саморазвёртыванием роев мобильных роботов для эффективного покрытия территорий и протяженных объектов в условиях ограниченных ресурсов. В рассмотренных сценариях роботы однородны, не имеют средств коммуникации и доступа к системам позиционирования, не располагают априорной информацией о размере группы и среде и вынуждены применять единое простое правило управления.

Основным научным вкладом работы является разработка и строгое теоретическое обоснование алгоритмов с гарантированной нелокальной (глобальной) сходимостью. Основные результаты заключаются в следующем.

1. Разработан и строго обоснован распределённый реактивный закон управления роем неголономных роботов типа машины Дубинса для плотного заметающего покрытия неизвестного коридора при отсутствии связи, нумерации и знания размера команды (глава 1).
2. Для роя UGV с кинематикой интегратора построен закон навигации, обеспечивающий прохождение коридора с неизвестными препятствиями и искривлёнными стенами без столкновений и с восстановлением равномерного поперечного распределения; результаты подтверждены теоремами сходимости, моделированием и экспериментами на физических роботах (глава 2).
3. Предложены нелинейные протоколы равномерного самораспределения полностью однородной анонимной команды (решётка с заданным шагом и распределение на неизвестном интервале) с установлением информационной связности; приложения включают круиз-контроль колонны, покрытие коридоров и построение виртуальной антенной решётки в 3D (глава 3).
4. Разработаны алгоритмы SA и CSA самораспределения по неизвестным сложным областям в условиях отсутствия GPS; выполнен сравнительный анализ семи методов виртуальных сил по комплексу метрик, включая предложенный критерий равномерности покрытия области (глава 4).
5. Построен распределённый протокол формирования равномерной замкнутой цепи по циклической выходной переменной для роботов с

динамикой второго порядка и неопределённостями, обеспечивающий заданный профиль скорости без требования начальной информационной связности (глава 5).

Перспективными направлениями дальнейших исследований являются: ослабление геометрических предположений о препятствиях и стенах; переход к моделям более высокого порядка и трёхмерным средам; сценарии с несколькими последовательными барьерами; экспериментальная верификация протоколов глав 3 и 5 на физических роботах; расширение сравнительного анализа покрытия методами на основе тесселяции Вороного.

Таким образом, диссертация вносит вклад в область распределённого управления роями роботов, предлагая практически реализуемые, ресурсоэффективные и теоретически обоснованные решения для автономного саморазвёртывания, востребованные в задачах мониторинга, инспекции, поисково-спасательных операций и экологического контроля.

Рекомендации

Полученные результаты рекомендуется использовать при проектировании нижеуровневых законов управления однородными роями мобильных роботов для замещающего и статического покрытия в условиях отсутствия глобального позиционирования и межроботной связи, а также при подготовке прикладных сценариев мониторинга протяжённых объектов, инспекции и поисково-спасательных операций. При практической реализации целесообразно учитывать ограничения на зону видимости, скорость и управляющие усилия, заложенные в теоретических предположениях соответствующих глав, и при необходимости проводить дополнительную калибровку параметров на целевой платформе.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Ниже собраны соглашения и обозначения, общие для значительной части диссертации. Локальные обозначения, вводимые в отдельных главах, поясняются при первом появлении.

Соглашения

- Полярные углы и углы курса отсчитываются *против часовой стрелки* от оси x абсолютной (либо иной явно указанной) системы координат, если не оговорено иное.
- Правая декартова система координат называется *абсолютной*, когда ось x направлена вдоль целевого движения по коридору (или вдоль иной выбранной опорной оси сцены), а ось y дополняет её до правой тройки на плоскости.
- Символ $:=$ означает «по определению равно», «обозначается».
- Надчёркивание и подчёркивание символа обычно сигнализируют соответственно о верхней и нижней оценке (границе) величины.
- Решения разрывных систем дифференциальных уравнений понимаются в смысле Филиппова, если не указано иное.
- Нумерация агентов $i = 0, \dots, N - 1$ или $i = 1, \dots, N$ вводится для удобства изложения; в алгоритмах агенты *анонимны* и не используют номера в управлении, если противное не оговорено.

Ключевые термины

- **рой** (однородный ансамбль): Совокупность взаимозаменяемых мобильных роботов без ролевой дифференциации, управляемых общим правилом на основе локальных данных.

- **реактивный закон управления:** Закон (регулятор, протокол), который в реальном времени напрямую преобразует текущие сенсорные наблюдения в текущее управление без заранее вычисленного плана траектории и без опоры на глобальную карту или интенсивный обмен сообщениями между роботами.
- **заметающее покрытие** (динамическое): Покрытие, при котором точки области контролируются временно, а агенты непрерывно перемещаются; в коридорных сценариях сочетается с формированием поперечного барьера (ср. [53]).
- **барьерное покрытие:** Формирование «барьера» (как правило, поперечной формации), пересекающего область интереса так, чтобы затруднить незамеченное пересечение.
- **статическое покрытие** (blanket): Самораспределение агентов по двумерной области с целью охвата территории и последующей остановки (или квазистатического режима) в целевых позициях.
- **модель типа машины Дубинса:** Неголономная кинематическая модель с управлением линейной скоростью/ускорением и угловой скоростью поворота корпуса робота при наличии ограничений на оба управляющих параметра.
- **информационная связность:** Связность графа информационного взаимодействия (видимости/соседства) агентов; в ряде глав допускается её отсутствие в начальный момент и возникновение в ходе работы алгоритма.
- **зона видимости** (радиус чувствительности): Конечная область, в которой агент определяет относительные положения объектов при незаслонённом обзоре.

Основные обозначения

- N : Число роботов (агентов) в команде; часто неизвестно агентам.
- w : Ширина коридора (в коридорных задачах); часто неизвестна агентам.
- v_{des} : Заданная (желаемая) скорость движения вдоль коридора или иной опорной оси.

- R_{sen} : Радиус сенсорной видимости (чувствительности) робота.
- R_{com} : Радиус связи (если рассматривается отдельно от сенсорной зоны).
- $\mathbf{r}_i(t) = [x_i(t), y_i(t)]^\top$: Положение робота i в момент t (в абсолютных координатах, где они введены).
- $\mathbf{v}_i, v_i, \mathbf{a}_i, a_i, \theta_i$: Вектор скорости, линейная скорость, вектор ускорения, касательное ускорение и угол курса робота i (в моделях, где эти величины используются).
- $\mathcal{N}_i(t)$: Множество соседей робота i в момент t (по правилу соседства главы).
- $\delta, R_\Xi, W(\cdot)$: Параметры закона поперечного/продольного согласования (главы о коридорах и цепях); смысл уточняется на месте.

Аббревиатуры

CSA — непрерывный секторальный алгоритм самораспределения

EDLS — равномерное развёртывание на (неизвестном) отрезке прямой (*Even Deployment on a Line Segment*)

GPS — глобальная спутниковая система позиционирования

LPS — локальная система позиционирования (*Local Positioning System*)

PBCCF — задача построения замкнутой цепной формации (*Problem of Building a Closed-Chain Formation*)

SA — секторальный алгоритм самораспределения

UGV — беспилотное наземное транспортное средство (*Unmanned Ground Vehicle*)

USV — беспилотное надводное средство (*Unmanned Surface Vehicle*)

VFB — методы на основе виртуальных силовых полей / виртуальных сил (*virtual force / potential field based*)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sensor networks and cooperative control / C. Cassandras, W. Li // *Europ. J. of Cont.* — 2005. — Vol. 11, no. 4/5. — P. 436—463.
2. Wireless sensor network survey / J. Yick, B. Mukherjee, D. Ghosal // *Computer Networks.* — 2008. — Vol. 52, no. 12. — P. 2292—2330.
3. Decentralized Coverage Control Problems for Mobile Robotic Sensor and Actuator Networks / A. Savkin, T. Cheng, Z. Li, F. Javed, A. Matveev, H. Nguyen. — Hoboken, NJ : IEEE Press, Wiley, 2015.
4. Swarm Robotics: A Survey / A. Abdelli, A. Amamra, A. Yachir // *Advances in Computing Systems and Applications* / ed. by M. Senouci, S. Boulahia, M. Benatia. — Cham : Springer, 2022. — P. 153—164.
5. Mobile robots in wireless sensor networks: A survey on tasks / H. Huang, A. Savkin, M. Ding, C. Huang // *Computer Networks.* — 2019. — Vol. 148. — P. 1—19.
6. Sweep-Coverage / W. Wu, Z. Zhang, W. Lee, D. Du // *Optimal Coverage in Wireless Sensor Networks.* Vol. 261. — Berlin : Springer, 2020. — P. 183—192. — (Springer Optimization and Its Applications).
7. Coverage in hybrid mobile sensor networks / W. Wang, V. Srinivasan, K. Chua // *IEEE Transactions on Mobile Computing.* — 2008. — Vol. 7, no. 11. — P. 1374—1387.
8. A survey of multi-agent formation control / K. Oh, M. Park, H. Ahn // *Automatica.* — 2015. — Vol. 53. — P. 424—440.
9. Deploying wireless sensor networks under limited mobility constraints / S. Chellappan, W. Gu, X. Bai, D. Xuan, B. Ma, K. Zhang // *IEEE Transactions on Mobile Computing.* — 2007. — Vol. 6, no. 10. — P. 1142—1157.
10. Connectivity-guaranteed and obstacle-adaptive deployment schemes for mobile sensor networks / G. Tan, S. Jarvis, A. Kermarrec // *IEEE Transactions on Mobile Computing.* — 2009. — Vol. 8, no. 6. — P. 836—848.
11. Cooperation without deliberation: A minimal behavior-based approach to multi-robot teams / B. Werger // *Art. Intel.* — 1999. — Vol. 110. — P. 293—320.

12. Overview: Collective control of multiagent systems / S. Knorn, Z. Chen, R. H. Middleton // IEEE Transactions on Control of Network Systems. — 2016. — Vol. 3, no. 4. — P. 334—347.
13. Movement-assisted sensor deployment / G. Wang, G. Cao, T. La Porta // IEEE Transactions on Mobile Computing. — 2006. — Vol. 5, no. 6. — P. 640—652.
14. A Review of Swarm Robotics in a NutShell / M. Shahzad, Z. Saeed, A. Akhtar, H. Munawar, M. Yousaf, N. Baloach, F. Hussain // Drones. — 2023. — Vol. 7, no. 4. — No. 269.
15. Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control: theory and applications / W. Ren, R. Beard. — London : Springer, 2008.
16. Survey of Robot Formation Control Methods / T. Xing, Y. Liu, L. Chen // Academic Journal of Science and Technology. — 2022. — Vol. 4, no. 2. — P. 58—61.
17. Leader-Follower Formation Control of Wheeled Mobile Robots without Attitude Measurements / J. Hirata-Acosta, J. Pliego-Jiménez, C.-H. C, R. Martinez-Clark // Applied Sciences. — 2021. — Vol. 11, no. 12. — P. 5639.
18. A Novel Virtual-Structure Formation Control Design for Mobile Robots with Obstacle Avoidance / X. Chen, F. Huang, Y. Zhang, Z. Chen, S. Liu, Y. Nie, J. Tang, S. Zhu // Applied Sciences. — 2020. — Vol. 10, no. 17. — P. 5807.
19. An Optimization-Based Cooperative Path-Following Framework for Multiple Robotic Vehicles / A. Alessandretti, A. Aguiar // IEEE Transactions on Control of Network Systems. — 2020. — Vol. 7, no. 2. — P. 1002—1014.
20. Behavior-Based Formation Control of Swarm Robots / D. Xu, X. Zhang, Z. Zhu, C. Chen, P. Yang // Math. Prob. Eng. — 2014. — Vol. 2014. — P. 205759.
21. A Survey of Distributed Consensus Protocols for Blockchain Networks / Y. Xiao, N. Zhang, W. Lou, Y. T. Hou // IEEE Com. Surveys and Tutorials. — 2020. — Vol. 22, no. 2. — P. 1432—1465.
22. Consensus-Based Formation Control of Networked Nonholonomic Vehicles With Delayed Communications / M. Maghenem, A. Loria, E. Nuno, E. Panteley // IEEE Trans. on Aut. Cont. — 2021. — Vol. 66, no. 5. — P. 2242—2249.

23. A survey of the consensus for multi-agent systems / Y. Li, C. Tan // Systems Sci. and Control Eng. — 2019. — Vol. 7, no. 1. — P. 468—482.
24. A survey on coverage path planning for robotics / E. Galceran, M. Carreras // Robotics and Autonomous Systems. — 2013. — Vol. 61, no. 12. — P. 1258—1276.
25. A survey on multi-robot coverage path planning for model reconstruction and mapping / R. Almadhoun, T. Taha, L. Seneviratne, Y. Zweiri // SN Applied Sciences. — 2019. — Vol. 1. — P. 847.
26. Collaborative Complete Coverage and Path Planning for Multi-Robot Exploration / H. Lin, Y. Huang // Sensors. — 2021. — Vol. 21, no. 3. — P. 3237.
27. Coverage of Known Spaces: The Boustrophedon Cellular Decomposition / H. Choset // Autonomous Robots. — 2000. — Dec. — Vol. 9, no. 3. — P. 247—253.
28. Multi-UAV Routing for Area Coverage and Remote Sensing with Minimum Time / G. Avellar, G. Pereira, L. Pimenta, P. Iscold // Sensors. — 2015. — Vol. 15, no. 11. — P. 27783—27791.
29. The giving tree: constructing trees for efficient offline and online multi-robot coverage / N. Agmon, N. Hazon, G. Kaminka // Annals of Mathematics and Artificial Intelligence. — 2008. — Vol. 52, no. 2—4. — P. 143—168.
30. Efficient boustrophedon multi-robot coverage: an algorithmic approach / I. Rekleitis, A. New, E. Rankin, H. Choset // Annals of Mathematics and Artificial Intelligence. — 2008. — Vol. 52, no. 2—4. — P. 109—142.
31. A repartitioning algorithm to guarantee complete, non-overlapping planar coverage with multiple robots / K. Hungerford, P. Dasgupta, K. Guruprasad // Distributed Autonomous Robotic Systems / ed. by N. Chong, Y. Cho. — Berlin : Springer-Verlag, 2016. — P. 391—405.
32. A study of grouping effect on mobile actuator sensor networks for distributed feedback control of diffusion process using central Voronoi tessellations / H. Chao, Y. Chen, W. Ren // International Journal of Robotics Research. — 2006. — Vol. 11, no. 2. — P. 185—190.
33. Distributed deployment schemes for mobile wireless sensor networks to ensure multilevel coverage / Y. Wang, Y. Tseng // IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems. — 2008. — Vol. 19, no. 9. — P. 1280—1294.

34. Movement-Assisted Sensor Deployment Algorithms: A Survey and Taxonomy / M. Senouci, A. Mellouk, K. Asnoune, F. Bouhidel // IEEE Communication Surveys and Tutorials. — 2015. — Vol. 17, no. 4. — P. 2493—2510.
35. Event-Based Motion Control for Mobile-Sensor Networks / Z. Butler, D. Rus // IEEE Pervasive Computing. — 2003. — Vol. 2, no. 4. — P. 34—42.
36. Movement Control Algorithms for Realization of Fault-Tolerant Ad Hoc Robot Networks / P. Basu, J. Redi // IEEE Network. — 2004. — Vol. 18, no. 4. — P. 36—44.
37. Energy-Efficient Deployment of Intelligent Mobile Sensor Networks / N. Heo, P. Varshney // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics Part A. — 2005. — Vol. 35, no. 1. — P. 78—92.
38. Efficient placement and dispatch of sensors in a wireless sensor network / Y. Wang, C. Hu, Y. Tseng // IEEE Transactions on Mobile Computing. — 2008. — Vol. 7, no. 2. — P. 262—274.
39. Push and pull: Autonomous deployment of mobile sensors for a complete coverage / N. Bartolini, T. Calamoneri, E. Fusco, A. Massini, S. Silvestri // Wireless networks. — 2010. — Vol. 16, no. 3. — P. 607—625.
40. Mobility limited flip-based sensor networks deployment / S. Chellappan, X. Bai, B. Ma, D. Xuan, C. Xu // IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems. — 2007. — Vol. 18, no. 2. — P. 199—211.
41. Barrier coverage with mobile sensors / C. Shen, W. Cheng, X. Liao, S. Peng // Proceedings of the International Symposium on Parallel Architectures, Algorithms, and Networks. — Sydney, Australia, 2008. — P. 99—104.
42. Connectivity preservation and coverage schemes for wireless sensor networks / T. Razafindralambo, D. Simplot-Ryl // IEEE Transactions on Automatic control. — 2011. — Vol. 56, no. 10. — P. 6819—6820.
43. Self-Deployment of Randomly Scattered Mobile Sensors to Achieve Barrier Coverage / M. Rout, R. Roy // IEEE Sensors Journal. — 2016. — Vol. 16, no. 18. — P. 6819—6820.
44. An extended virtual force based approach to distributed self-deployment in mobile sensor networks / J. Li, B. Zhang, L. Cui, S. Chai // International Journal of Distributed Sensor Networks. — 2012. — Vol. 8, no. 3. — P. 1—14.

45. Distributed algorithms for energy-efficient even self-deployment in mobile sensor networks / S. Yuan, W. Bing, S. Zhijie, K. Pattipati, S. Gupta // *IEEE Transactions on Mobile Computing*. — 2014. — Vol. 13, no. 5. — P. 1035—1047.
46. Distributed Coverage Control of Networked Heterogeneous Robots / X. Han, L. Ma, K. Feng // *Proceedings of the 2017 IEEE 6th Data Driven Control and Learning Systems Conference*. — Chongqing, China, 05/2017. — P. 373—382.
47. An Overview of Physicomimetics / W. M. Spears, D. F. Spears, R. Heil, W. Kerr, S. Hettiarachchi // *Swarm Robotics* / ed. by E. Şahin, W. M. Spears. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2005. — P. 84—97.
48. Deployment techniques in wireless sensor networks: a survey, classification, challenges, and future research issues / R. Priyadarshi, B. Gupta, A. Anurag // *J. of Supercomputing*. — 2020. — Vol. 76, no. 1. — P. 7333—7373.
49. Coverage control for mobile sensing networks / J. Cortes, S. Martinez, T. Karatas, F. Bullo // *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. — 2004. — Vol. 20, no. 4. — P. 243—255.
50. Decentralized, adaptive coverage control for networked robots / M. Schwager, D. Rus, J. Slotine // *International Journal of Robotics Research*. — 2009. — Vol. 28, no. 3. — P. 357—375.
51. Coverage Control for Multirobot Teams With Heterogeneous Sensing Capabilities / M. Santos, Y. Diaz-Mercado, M. Egerstedt // *IEEE Robotics and Automation Letters*. — 2018. — Vol. 3, no. 2. — P. 919—925.
52. Distributed Node Deployment Algorithms in Mobile Wireless Sensor Networks: Survey and Challenges / M. Sadeghi Ghahroudi, A. Shahrabi, S. M. Ghoreyshi, F. A. Alfouzan // *ACM Trans. Sen. Netw.* — New York, NY, USA, 2023. — July. — Vol. 19, no. 4. — DOI: 10.1145/3579034. — URL: <https://doi.org/10.1145/3579034>.
53. Command control for many-robot systems / D. Gage // *Proceedings of the 19th Annual AUVS Technical Symposium*. Vol. 4. — Hunstville, Alabama, USA, 1992. — P. 22—24.
54. Decentralized control for mobile robotic sensor network self-deployment: Barrier and sweep coverage problems / T. Cheng, A. Savkin // *Robotica*. — 2011. — Vol. 29. — P. 283—294.

55. Guidance of mobile actuator-plus-sensor networks for improved control and estimation of distributed parameter systems / M. Demetriou // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2010. — Vol. 55, no. 7. — P. 1570—1584.
56. An Overview of Recent Advances in Event-Triggered Consensus of Multiagent Systems / L. Ding, Q. Han, X. Ge, X. Zhang // IEEE Transactions on Cybernetics. — 2018. — Vol. 48, no. 4. — P. 1110—1123.
57. Coordination and Control of Complex Network Systems With Switching Topologies: A Survey / G. Wen, X. Yu, W. Yu, J. Lu // IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics: Systems. — 2021. — Vol. 51, no. 10. — P. 6342—6357.
58. Graph-Theoretic Connectivity Control of Mobile Robot Networks / M. Zavlanos, M. Egerstedt, G. Pappas // Proceedings of the IEEE. — 2011. — Vol. 99, no. 9. — P. 1525—1540.
59. Distributed Coordination Control of Multiagent Systems While Preserving Connectedness / M. Ji, M. Egerstedt // IEEE Transactions on Robotics. — 2007. — Vol. 23, no. 4. — P. 693—703.
60. Connectedness Preserving Distributed Swarm Aggregation for Multiple Kinematic Robots / D. Dimarogonas, K. Kyriakopoulos // IEEE Transactions on Robotics. — 2008. — Vol. 24, no. 5. — P. 1213—1223.
61. Connectivity-preserving synchronization of time-delay Euler-Lagrange networks with bounded actuation / Y. Yang, Y. Shi, D. Constantinescu // IEEE Transactions on Cybernetics. — 2021. — Vol. 51, no. 7. — P. 3469—3482. — DOI: 10.1109/TCYB.2019.2914403.
62. Distributed Connectivity Control of Mobile Networks / M. Zavlanos, G. Pappas // IEEE Transactions on Robotics. — 2008. — Vol. 24, no. 6. — P. 1416—1428.
63. Graph Matching-Based Formation Reconfiguration of Networked Agents With Connectivity Maintenance / Z. Kan, L. Navaravong, J. Shea, E. Pasiliao, W. Dixon // IEEE Transactions on Control of Network Systems. — 2015. — Vol. 2, no. 1. — P. 24—35.
64. Preserving Strong Connectivity in Directed Proximity Graphs / H. Poonawala, M. Spong // IEEE Trans. on Autom. Cont. — 2017. — Vol. 62, no. 9. — P. 4392—4404.

65. A Survey on Swarm Robotics for Area Coverage Problem / D. Muhsen, A. Sadiq, F. Raheem // Algorithms. — 2024. — Vol. 17, no. 3. — P. 3. — DOI: 10.3390/a17010003.
66. Metaheuristic algorithms and their applications in wireless sensor networks: Review, open issues, and challenges / E. Houssein, M. Saad, Y. Djenouri, G. Hu, A. Ali, H. Shabah // Cluster Computing. — 2024. — Vol. 27, no. 10. — P. 13643—13673.
67. Row Straightening via Local Interactions / I. Wagner, A. Bruckstein // Circuits, Systems, and Signal Processing. — 1997. — Vol. 16, no. 2. — P. 287—305.
68. Self-deployment of Mobile Sensors on a Ring / P. Flocchini, G. Prencipe, N. Santoro // Theoretical Computer Science. — 2008. — Vol. 402, no. 1. — P. 67—80.
69. Uniform Multi-agent Deployment on a Ring / Y. Elor, A. Bruckstein // Theoretical Computer Science. — 2011. — Vol. 412, no. 8—10. — P. 783—795.
70. A Survey on Techniques in the Circular Formation of Multi-Agent Systems / H. Litimein, Z. Huang, A. Hamza // Electronics. — 2021. — Vol. 10, no. 24. — P. 2959.
71. The Entrapment/Escorting Mission for a Multi-Robot System: Theory and Experiments / G. Antonelli, F. Arrichiello, S. Chiaverini // 2007 IEEE/ASME Int. Conf. Adv. Intel. Mechatronics. — 2007. — P. 1—6.
72. Distributed reactive motion control for dense cooperative sweep coverage of corridor environments by swarms of non-holonomic robots / A. Matveev, P. Konovalov // International Journal of Control. — 2021. — Vol. 95, no. 1. — P. 1—14. — DOI: 10.1080/00207179.2021.2005258.
73. Distributed nonlinear algorithms for building chain formations by fully homogeneous multi-agent teams, with establishing informational connectivity / P. A. Konovalov, A. S. Matveev // Systems and Control Letters. — 2025. — Vol. 204. — P. 106143. — DOI: 10.1016/j.sysconle.2025.106143.
74. Distributed algorithms for self-spreading of robotic networks over unknown complex areas in GPS-denied environments / P. A. Konovalov, A. S. Matveev // Cybernetics and Physics. — 2025. — Vol. 14, no. 1. — P. 52—61. — DOI: 10.35470/2226-4116-2024-14-1-52-61.

75. Distributed self-organisation of a homogeneous swarm of robots into a uniform closed-chain, with creating informational connectivity / P. A. Konovalov, A. S. Matveev // International Journal of Control. — 2026. — Vol. 99, no. 6. — P. 1877—1897.
76. Robust distributed algorithm for building closed-chain formations by homogeneous multi-agent teams / P. A. Konovalov, A. S. Matveev // Proceedings of SPIE. Vol. 13404. — 10/2024. — P. 1340411. — (Fourth International Conference on Computer Communication and Network Security (CCRIS 2024)).
77. Efficient algorithms for distributed virtual force-based self-spreading of robotic networks in GPS-denied environments / P. A. Konovalov, A. S. Matveev // 2024 7th International Conference on Robotics, Control and Automation Engineering (RCAE). — 2024. — P. 127—132.
78. Decentralized reactive navigation for densest sweep coverage of corridor environments by swarms of non-holonomic robots / A. S. Matveev, P. A. Konovalov // 2021 29th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED). — 2021. — P. 1108—1113.
79. Decentralized reactive control of non-holonomic robots for densest sweep coverage / A. S. Matveev, P. A. Konovalov // 2021 European Control Conference (ECC). — 2021. — P. 1144—1149.
80. Reactive Autonomous Ad Hoc Self-Organization of Homogeneous Teams of Unmanned Surface Vehicles for Sweep Coverage of a Passageway with an Obstacle Course / P. A. Konovalov, A. S. Matveev, K. A. Gordievich // Drones. — 2025. — Vol. 9, no. 3. — P. 161. — DOI: 10.3390/drones9030161.
81. Self-organization of a swarm of mobile robots into a uniform closed chain by resource-saving nonlinear control laws / P. A. Konovalov // ANS Conference Series: Russian Conference on Dynamics (RCD). Book of Abstracts. — Izhevsk, 2023. — P. 48—49.
82. Building regular formations of mobile robots / A. S. Matveev, P. A. Konovalov, A. A. Kapitonov, A. I. Shepeljavyi // 2022 22nd International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS). — Jeju, Republic of Korea, 2022. — P. 123—128.

83. Координация группы мобильных роботов / К. А. Гордиевич, П. А. Коновалов // Навигация и управление движением: материалы XXIV конференции молодых учёных. — Санкт-Петербург, 2022. — С. 17—19.
84. Distributed coverage games for energyaware mobile sensor networks / M. Zhu, S. Martínez // SIAM Journal on Control and Optimization. — 2013. — Vol. 51, no. 1. — P. 1—27.
85. Distributed deployment strategies for improved coverage in a network of mobile sensors with prioritized sensing field / H. Mahboubi, J. Habibi, A. Aghdam, K. Sayrafian-Pour // IEEE Transactions on Industrial Informatics. — 2013. — Vol. 9, no. 1. — P. 451—461.
86. Design and evaluation of two distributed methods for sensors placement in wireless sensor networks / A. Osmani // Journal of Advances in Computer Research. — 2011. — Vol. 2, no. 1. — P. 13—26.
87. Probabilistic dynamic deployment of wireless sensor networks by artificial bee colony algorithm / C. Ozturk, D. Karaboga, B. Gorkemli // Sensors. — 2011. — Vol. 11, no. 6. — P. 6056—6065.
88. A faster convergence artificial bee colony algorithm in sensor deployment for wireless sensor networks / X. Yu, J. Zhang, J. Fan, T. Zhang // International Journal of Distributed Sensor Networks. — 2013. — Vol. 9. — P. 497264.
89. A model for the classification and survey of clock synchronization protocols in WSNs / A. Swain, R. Hansdahb // Ad Hoc Networks. — 2015. — Vol. 27. — P. 219—241.
90. Time Synchronization in Networks: A Survey / J. Wand, R. Zhao, W. Gu // Proceedings of the 19th International Conference on Control, Automatin, and Systems. — ICC Jeju, Korea, 10/2019. — P. 121—126.
91. Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides / A. Filippov. — Dordrecht, the Netherlands : Kluwer Academic Publishers, 1988.
92. Stability of Continuous-Time Consensus Algorithms for Switching Networks with Bidirectional Interaction / A. Matveev, I. Novinitsyn, A. Proskurnikov // Proceedings of the 2013 European Control Conference. — Zürich, the Switzerland, 07/2013. — P. 1872—1877.

93. Distributed Coordination Control of Multiagent Systems While Preserving Connectedness / M. Ji, M. Egerstedt // IEEE Transactions on Robotics. — 2007. — Vol. 23, no. 4. — P. 693—703.
94. Vision-based corridor navigation for humanoid robots / A. Faragasso, G. Oriolo, A. Paolillo, M. Vendittelli // 2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation. — 2013. — P. 3190—3195.
95. Corridor navigation and obstacle distance estimation for monocular vision mobile robots / Z. Zhou, T. Chen, D. Wu, C. Yu // International Journal of Digital Content Technology and its Applications. — 2011. — Vol. 5, no. 3. — P. 192—202.
96. Autonomous Vision-Based Navigation of a Quadrotor in Corridor-Like Environments / J. Keshavan, G. Gremillion, H. Alvarez-Escobar, J. Humbert // International Journal of Micro Air Vehicles. — 2015. — Vol. 7, no. 2. — P. 87—103.
97. Efficient safe corridor navigation with jerk limited trajectory for quadrotors / S. Lai, M. Lan, B. M. Chen // 2018 37th Chinese Control Conference (CCC). — 2018. — P. 10065—10070.
98. Corridor Segmentation for Automatic Robot Navigation in Indoor Environment using Edge Devices / S. Gupta, S. R., R. Mishra, G. Singal, T. Badal, D. Garg // Computer Networks. — 2020. — June. — Vol. 178. — P. 107374.
99. Generation of navigation networks for corridor spaces based on indoor visibility map / Y. Pang, L. Zhou, B. Lin, G. Lv, C. Zhang // International Journal of Geographical Information Science. — 2020. — Vol. 34, no. 1. — P. 177—201.
100. Distributed Reactive Navigation of Robotic Teams for Sweep Coverage of a Corridor Environment with an Obstacle Course / A. Matveev, P. Kononov, K. Gordievich, S. Gusev // 2022 7th International Conference on Robotics and Automation Engineering (ICRAE). — 2022. — P. 210—214.
101. State Agreement for Continuous-Time Coupled Nonlinear Systems / Z. Lin, B. Francis, M. Maggiore // SIAM J. Control and Optimization. — 2007. — Vol. 46. — P. 288—307.
102. Graph-theoretic connectivity control of mobile robot networks / M. Zavlanos, M. Egerstedt, G. Pappas // Proc. IEEE. — 2011. — Vol. 99, no. 9. — P. 1525—1540.

103. Network Connectivity Preserving Formation Stabilization and Obstacle Avoidance via a Decentralized Controller / Z. Kan, A. Dani, J. Shea, W. Dixon // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2012. — Vol. 57, no. 7. — P. 1827—1832.
104. Real-time navigation of mobile robots in problems of border patrolling and avoiding collisions with moving and deforming obstacles / A. Matveev, C. Wang, A. Savkin // Robotics and Autonomous Systems. — 2012. — Vol. 60, no. 6. — P. 769—788.
105. Nonlinear sliding mode control of an unmanned agricultural tractor in the presence of sliding and control saturation / A. Matveev, M. Hoy, J. Katupitiyac, A. Savkin // Robotics and Autonomous Systems. — 2013. — Vol. 61, no. 9. — P. 973—987.
106. Sur un probleme de geometrie elementaire / J. Darboux // Bulletin des Sciences Math. et Astron., Serie 2. — 1878. — Vol. 2, no. 1. — P. 298—304.
107. Formation Control. The Van Loan Scheme and Other Algorithms / P. Shcherbakov // Automation and Remote Control. — 2011. — Vol. 72, no. 10. — P. 681—696.
108. Nonlinear fixed-time control protocol for uniform allocation of agents on a segment / S. Parsegov, A. Polyakov, P. Shcherbakov // Doklady Mathematics. — 2013. — Vol. 87, no. 1. — P. 133—136.
109. Problem of Uniform Deployment on a Line Segment for Second-Order Agents / A. Proskurnikov, S. Parsegov // Automation and Remote Control. — 2016. — Vol. 77, no. 7. — P. 1248—1258.
110. Delayed and Switched Control of Formations on a Line Segment: Delays and Switches Do Not Matter / A. Aleksandrov, A. Fradkov, A. Semenov // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2020. — Vol. 65, no. 2. — P. 794—800.
111. Discrete-time deployment of agents on a line segment: Delays and Switches Do Not Matter / A. Aleksandrov, A. Semenov, A. Fradkov // Automation and Remote Control. — 2020. — Vol. 81, no. 4. — P. 637—648.
112. Fixed-time stability of switched systems with application to a problem of formation control / A. Aleksandrov, N. Andriyanova // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. — 2021. — Vol. 40. — P. 101008.

113. A problem of the equidistant deployment for discrete-time multiagent systems / A. Aleksandrov, A. Arakelov // Vestnik of the Saint Petersburg University. Applied Mathematics, Computer Sciences, and Control Processes. — 2022. — Vol. 18, no. 1. — P. 171—178.
114. Synthesis of Distributed Control of Coordinated Path Following Based on Hybrid Approach / Y. Lan, G. Yan, Z. Lin // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2011. — Vol. 56, no. 5. — P. 1170—1175.
115. A Cooperative Target-Fencing Protocol of Multiple Vehicles / Z. Chen // Automatica. — 2019. — Vol. 107. — P. 591—594.
116. Cooperative label-free moving target fencing for second-order multi-agent systems with rigid formation / B. Hu, H. Zhang, Y. Shi // Automatica. — 2023. — Vol. 148. — No. 110788.
117. Spontaneous-Ordering Platoon Control for Multirobot Path Navigation Using Guiding Vector Fields / B. Hu, H. Zhang, W. Yao, J. Ding, M. Cao // in IEEE Transactions on Robotics. — 2023. — Vol. 39, no. 4. — P. 2654—2668.
118. Ordering-flexible multi-robot coordination for moving target convoying using long-term task execution / B. Hu, Y. Zhou, H. Wei, Y. Wang, C. Lv // Automatica. — 2024. — Vol. 163. — No. 111558.
119. An Optimized Node Deployment Solution Based on a Virtual Spring Force Algorithm for Wireless Sensor Network Applications / X. Deng, Z. Yu, R. Tang, X. Qian, K. Yuan, S. Liu // Sensors. — 2019. — Vol. 19, no. 8. — P. 1817. — DOI: 10.3390/s19081817. — URL: <https://www.mdpi.com/1424-8220/19/8/1817>.
120. Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides / A. Filippov. — Dordrecht, the Netherlands : Kluwer, 1988.
121. A review paper on wireless sensor network techniques in Internet of Things (IoT) / K. Gulati, R. S. K. Boddu, D. Kapila, S. L. Bangare, N. Chandnani, G. Saravanan // Materials Today. — 2022. — Vol. 49. — P. 161—165.
122. Coordinated control of multi-robot systems: A survey / J. Cortés, M. Egerstedt // SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration. — 2017. — Vol. 10. — P. 495—503.
123. Differential evolution-based 3D directional wireless sensor Network deployment optimization / B. Cao, X. Kang, J. Zhao, P. Yang, Z. Lv, X. Liu // IEEE IoT Journal. — 2018. — Vol. 5. — P. 3594—3605.

124. Underwater Distributed Antenna Systems: Design Opportunities and Challenges / Z. Wang, S. Zhou, Z. Wang // *IEEE Commun. Mag.* — 2018. — Vol. 56. — P. 178—185.
125. UAV-Assisted Heterogeneous Networks for Capacity Enhancement / V. Sharma, M. Bennis, R. Kumar // *IEEE Communications Letters.* — 2016. — Vol. 20, no. 6. — P. 1207—1210. — DOI: 10.1109/LCOMM.2016.2553103.
126. Cooperative robotic networks for underwater surveillance: An overview / G. Ferri, A. Munafó, A. Tesei, P. Braca, F. Meyer, K. Pelekanakis, R. Petroccia, J. Alves, C. Strode, K. LePage // *IET Radar Sonar and Navigation.* — 2017. — Vol. 11, no. 12. — P. 1740—1761.
127. Minimum energy target tracking with coverage guarantee in wireless sensor networks / C. Lersteau, A. Rossi, M. Sevaux // *European Journal of Operational Research.* — 2018. — Vol. 265. — P. 882—894.
128. Comparison and overview of wireless sensor network systems for medical applications / A. Mathur, T. Newe // *International Journal on Smart Sensing and Intelligent Systems.* — 2020. — Vol. 13, no. 1. — P. 1—6.
129. Automatic Forest Fire Detection and Suppression Smart Grid System / G. Gopalakrishnan, M. Arul, T. Dinessh, S. Divayarupa, B. Benazir // *International Journal of Scientific Research in Science and Technology.* — 2021. — Vol. 8, no. 3. — P. 495—503.
130. A smart farming concept based on smart embedded electronics, Internet of Things and wireless sensor network / M. Mahbub // *Internet of Things.* — 2020. — Vol. 9. — P. 100161.
131. Advances on localization techniques for wireless sensor networks: A survey / T. J. Chowdhury, C. Elkin, V. Devabhaktuni, D. B. Rawat, J. Oluoch // *Computer Networks.* — 2016. — Vol. 110. — P. 284—305.
132. Deployment techniques in wireless sensor networks: a survey, classification, challenges, and future research issues / R. Priyadarshi, B. Gupta, A. Anurag // *Journal of Supercomputing.* — 2022. — Vol. 78, no. 1. — P. 1—45.
133. From individuals to aggregations: The interplay between behavior and physics / G. Flierl, D. Grünbaum, S. Levins, D. Olson // *Journal of Theoretical biology.* — 1999. — Vol. 196, no. 4. — P. 397—454.

134. Cooperative transport by ants and robots / C. Kube, E. Bonabeau // *Robotics and Autonomous Systems*. — 2000. — Vol. 30, no. 1/2. — P. 85—101.
135. A Self-Deployment Algorithm for Maintaining Maximum Coverage and Connectivity in Underwater Acoustic Sensor Networks Based on an Ant Colony Optimization / H. Wang, Y. Li, L. Zhang, Y. Fan, Z. Li // *Applied Sciences*. — 2017. — Vol. 9, no. 7. — No. 1479. — DOI: 10.3390/app9071479.
136. Exploration Enhanced RPSO for Collaborative Multitarget Searching of Robotic Swarms / J. Yang, R. Xiong, X. Xiang, Y. Shi // *Complexity*. — 2020. — Vol. 7. — No. 8863526.
137. A Bacterial Chemotaxis-Inspired Coordination Strategy for Coverage and Aggregation of Swarm Robots / L. Jiang, H. Mo, P. Tian // *Applied Sciences*. — 2021. — Vol. 11, no. 3. — No. 1347.
138. Bee-Inspired Algorithm for Groups of Cyber-Physical Robotic Cleaners with Swarm Intelligence / O. Y. Maryasin // *Cyber-Physical Systems: Modelling and Intelligent Control* / ed. by A. G. Kravets, A. A. Bolshakov, M. Shcherbakov. — Cham : Springer International Publishing, 2021. — P. 167—177. — DOI: 10.1007/978-3-030-66077-2_13.
139. Immune clonal selection algorithm for target coverage of WSN's / X. Lu, Y. Ding, K. Hao // *International Journal of Modelling, Identification and Control*. — 2011. — Vol. 12, no. 1. — P. 119—124.
140. Genetic Algorithm Based Node Deployment in Hybrid Wireless Sensor Networks / O. Banimelhem, M. Mowafi, W. Aljoby // *Communications and Network*. — 2013. — Vol. 5, no. 4. — P. 273—279.
141. Rearrangement of mobile wireless sensor nodes for coverage maximization based on immune node deployment algorithm / M. Abo-Zahhad, S. Ahmed, M. Sabor, S. Sasaki // *Computers and Electrical Engineering*. — 2015. — Vol. 43. — P. 76—89.
142. Distributed sensor deployment using potential fields / Y. Hanay, V. Gazi // *Ad Hoc Networks*. — 2017. — Vol. 67. — P. 77—86.
143. Distributed Deployment Algorithms for Coverage Improvement in a Network of Wireless Mobile Sensors: Relocation by Virtual Force / H. Mahboubi, A. Aghdam // *IEEE Transactions on Control of Network Systems*. — 2017. — Vol. 4, no. 4. — P. 736—748. — DOI: 10.1109/TCNS.2016.2547579.

144. Coverage Enhancement Strategy for WSNs Based on Virtual Force-Directed Ant Lion Optimization Algorithm / Y. Yao, Y. Li, D. Xie, S. Hu, C. Wang, Y. Li // *IEEE Sensors Journal*. — 2021. — Vol. 21, no. 17. — P. 19611—19622. — DOI: 10.1109/JSEN.2021.3091619.
145. An Adaptive Three-Dimensional Improved Virtual Force Coverage Algorithm for Nodes in WSN / M. Zhang, J. Yang, T. Qin // *Axioms*. — 2022. — Vol. 11, no. 5. — No. 199. — DOI: 10.3390/axioms11050199.
146. A virtual force interaction scheme for multi-robot environment monitoring / K. Ji, Q. Zhang, Z. Yuan, H. Cheng, D. Yu // *Robotics and Autonomous Systems*. — 2022. — Vol. 149. — No. 103967. — DOI: 10.3390/axioms11050199.
147. Managing the Mobility of a Mobile Sensor Network Using Network Dynamics / K. Ma, Y. Zhang, W. Trappe // *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*. — 2008. — Vol. 19, no. 1. — P. 106—120. — DOI: 10.1109/TPDS.2007.1113.
148. Distributed communication-aware coverage control by mobile sensor networks / Y. Kantaros, M. Zavlanos // *Automatica*. — 2016. — Vol. 63. — P. 209—220.
149. On the Vulnerabilities of Voronoi-Based Approaches to Mobile Sensor Deployment / N. Bartolini, S. Ciavarella, S. Silvestri, T. L. Porta // *IEEE Trans. on Mob. Comp.* — 2016. — Vol. 15, no. 12. — P. 3114—3128. — DOI: 10.1109/TMC.2016.2524630.
150. Robust Adaptive Coverage Control for Robotic Sensor Networks / M. Schwager, M. Vitus, S. Powers, D. Rus, C. Tomlin // *IEEE Transactions on Control of Network Systems*. — 2017. — Vol. 4, no. 3. — P. 462—476.
151. Fast, on-line collision avoidance for dynamic vehicles using buffered Voronoi cells / D. Zhou, Z. Wang, S. Bandyopadhyay, M. Schwager // *IEEE Rob. and Autom. Let.* — 2017. — Vol. 2, no. 2. — P. 1047—1054.
152. Computationally-Efficient Distributed Algorithms of Navigation of Teams of Autonomous UAVs for 3D Coverage and Flocking / T. Elmokadem, A. Savkin // *Drones*. — 2021. — Vol. 5, no. 4. — No. 124.

153. Coverage and Energy Analysis of Mobile Sensor Nodes in Obstructed Noisy Indoor Environment: A Voronoi-Approach / K. Eledlebi, D. Ruta, H. Hildmann, F. Saffre, Y. Al Hammadi, A. F. Isakovic // IEEE Transactions on Mobile Computing. — 2022. — Vol. 21, no. 8. — P. 2745—2760. — DOI: 10.1109/TMC.2020.3046184.
154. A distributed self-organising node deployment algorithm for mobile sensor networks / M. Ghahroudi, A. Shahrabi, T. Boutaleb // International Journal of Communication Systems. — 2022. — Vol. 35, no. 16. — No. 5309. — DOI: 10.1002/dac.5309.
155. OA-DVFA: A Distributed Virtual Forces-based Algorithm to monitor an area with unknown obstacles / I. Khoufi, P. Minet, A. Laouiti // 2016 13th IEEE Annual Consumer Communications and Networking Conference (CCNC). — 2016. — P. 1036—1041. — DOI: 10.1109/CCNC.2016.7444933.
156. Autonomous Mobile Sensor Placement in Complex Environments / N. Bartolini, T. Calamoneri, S. Ciavarella, T. La Porta, S. Silvestri // ACM Trans. on Auton. and Adaptive Syst. — 2017. — Vol. 12, no. 2. — P. 1—28. — DOI: 10.1145/3050439.
157. A distributed self spreading algorithm for mobile wireless sensor networks / N. Heo, P. Varshney // 2003 IEEE Wireless Communications and Networking, 2003. WCNC 2003. Vol. 3. — 2003. — 1597—1602 vol.3. — DOI: 10.1109/WCNC.2003.1200625.
158. A Smart Self-Organizing Node Deployment Algorithm in Wireless Sensor Networks / M. S. Ghahroudi, A. Shahrabi, T. Boutaleb // 2019 15th Annual Conference on Wireless On-demand Network Systems and Services (WONS). — 2019. — P. 17—23. — DOI: 10.23919/WONS.2019.8795451.
159. An efficient self-organizing node deployment algorithm for mobile sensor networks / M. S. Ghahroudi, A. Shahrabi, T. Boutaleb // UBICOMM 2018, The 12th Int. Conf. on Mobile Ubiquitous Computing, Systems, Services and Technologies. — IARIA. Athens, 2018. — P. 89—94.
160. Biologically inspired swarm robotic network ensuring coverage and connectivity / E. Mathews, T. Graf, K. Kulathunga // 2012 IEEE Int. Conf. on Systems, Man, and Cybernetics. — 2012. — P. 84—90. — DOI: 10.1109/ICSMC.2012.6377681.

161. A strategy for target capturing with collision avoidance for non-holonomic robots with sector vision and range-only measurements / A. Zakhar'eva, A. Matveev, M. Hoy, A. Savkin // *Robotica*. — 2015. — Vol. 33, no. 2. — P. 385—412.
162. Distributed static and dynamic circumnavigation control with arbitrary spacings for a heterogeneous multi-robot system / W. Yao, H. Lu, Z. Zeng, J. Xiao, Z. Zheng // *J. Intel. & Rob. Syst.* — 2019. — Vol. 94, no. 3. — P. 883—905.
163. Communication-free autonomous cooperative circumnavigation of unpredictable dynamic objects / A. Matveev, V. Magerkin // *Robotica*. — 2022. — Vol. 40, no. 3. — P. 520—543.
164. Optimization of Base Location and Patrol Routes for Unmanned Aerial Vehicles in Border Intelligence, Surveillance, and Reconnaissance / Y. Liu, Z. Liu, J. Shi, G. Wu, C. Chen // *Journal of Advanced Transportation*. — 2019. — Vol. 2019. — P. 1—13.
165. Cooperative Gradient-Free Localization and Tracking of Moving Environmental Boundaries by Teams of Nonholonomic Robots / A. Matveev, A. Semakova, A. Kapitonov, I. Berman // *International Conference on Control, Automation and Systems*. — 2022. — P. 1736—1741.
166. Circle formation for anonymous mobile agents with double-integrator dynamics / C. Wang, G. Xie, L. Wang, M. Cao // *Proceedings of the 32nd Chinese Control Conference*. — 2013. — P. 7320—7325.
167. Enclosing a moving target with an optimally rotated and scaled multiagent pattern / M. Aranda, Y. Mezouar, G. López-Nicolás, C. Sagüés // *International Journal Control*. — 2021. — Vol. 94, no. 3. — P. 10010—10023.
168. Cooperative Target Enclosing and Tracking Control with Obstacles Avoidance for Multiple Nonholonomic Mobile Robots / X. Li, X. Liu, G. Wang, S. Han, C. Shi, H. Che // *Applied Sciences*. — 2022. — Vol. 12, no. 6. — P. 2876.
169. Enclosing control for nonholonomic mobile agents with a moving target of unknown velocity / S. Ju, J. Wang, L. Dou // *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. — 2023. — Vol. 33, no. 16. — P. 10010—10023.
170. Collective circular motion in synchronized and balanced formations with second-order rotational dynamics / A. Jain, D. Ghose // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2018. — Vol. 54. — P. 156—173.

171. Coverage control for heterogeneous mobile sensor networks on a circle / C. Song, L. Liu, G. Feng, S. Xu // *Automatica*. — 2016. — Vol. 63. — P. 349—358.
172. Controlling anonymous mobile agents with unidirectional locomotion to form formations on a circle / C. Wang, G. Xie, M. Cao // *Automatica*. — 2014. — Vol. 50, no. 4. — P. 1100—1108.
173. Coverage control for mobile sensor networks with limited communication ranges on a circle / C. Song, Y. Fan // *Automatica*. — 2018. — Vol. 92. — P. 155—161.
174. Limit-Cycle-Based Decoupled Design of Circle Formation Control with Collision Avoidance for Anonymous Agents in a Plane / C. Wang, G. Xie // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2017. — Vol. 62, no. 12. — P. 6560—6567.
175. Coverage control for heterogeneous mobile sensor networks with bounded position measurement errors / C. Song, L. Liu, G. Feng, Y. Fan, S. Xu // *Automatica*. — 2020. — Vol. 120. — No.109118.
176. General formation control for multi-agent systems with double- integrator dynamics / C. Wang, W. Xia, J. Sun, R. Fan, G. Xie // *2018 IEEE Conference on Decision and Control*. — 2018. — P. 918—923.
177. Circle formation control of second-order multi-agent systems with bounded measurement errors / Y. Wang, T. Shen, C. Song, Y. Zhang // *Neurocomputing*. — 2020. — Vol. 397. — P. 160—167.
178. Coverage Control for Mobile Sensor Networks With Double-Integrator Dynamics and Unknown Disturbances / P. Wang, C. Song, L. Liu // *IEEE Transaction on Automatic Control*. — 2023. — Vol. 68, no. 10. — P. 6299—6306.
179. The Lord of the Ring Road: A Review and Evaluation of Autonomous Control Policies for Traffic in a Ring Road / F. Chou, A. Bagabaldo, A. Bayen // *ACM Transactions on Cyber-Physical Systems*. — 2022. — Vol. 6, no. 1. — P. 1—25.
180. Nonlinear adaptive cruise control of vehicular platoons / I. Karafyllis, D. Theodosis, M. Papageorgiou // *International Journal of Control*. — 2023. — Vol. 96, no. 1. — P. 147—169.
181. A Review Analysis of Optimal Velocity Models / H. Lazar, K. Rhoulami, D. Rahmani // *Periodica Polytechnica Transportation Engineering*. — 2016. — Vol. 44, no. 2. — P. 123—131.

182. L_p String Stability of Cascaded Systems: Application to Vehicle Platooning / J. Ploeg, N. van de Wouw, H. Nijmeijer // IEEE Transactions on Control Systems Technology. — 2014. — Vol. 22, no. 2. — P. 786—793.
183. String Stability and a Delay-Based Spacing Policy for Vehicle Platoons Subject to Disturbances / B. Besselink, K. Johansson // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2017. — Vol. 62, no. 9. — P. 4376—4391.
184. Robust Distributed Control Protocols for Large Vehicular Platoons With Prescribed Transient and Steady-State Performance / C. Verginis, C. Bechlioulis, D. Dimarogonas, K. Kyriakopoulos // IEEE Transactions on Control Systems Technology. — 2018. — Vol. 26, no. 1. — P. 299—304.
185. Vehicle Following on a Ring Road Under Safety Constraints: Role of Connectivity and Coordination / M. Pooladsanj, K. Savla, P. Ioannou // IEEE Transactions on Intelligent Vehicles. — 2023. — Vol. 8, no. 1. — P. 628—638.
186. Spacing Policies for Adaptive Cruise Control: A Survey / C. Wu, Z. Xu, Y. Liu, C. Fu, K. Li, M. Hu // IEEE Access. — 2020. — Vol. 8. — P. 50149—50162.
187. Smoothing Traffic Flow via Control of Autonomous Vehicles / Y. Zheng, J. Wang, K. Li // IEEE Internet of Things Journal. — 2020. — Vol. 7, no. 5. — P. 3882—3896.
188. Traffic Flow on a Ring With a Single Autonomous Vehicle: An Interconnected Stability Perspective / V. Giammarino, S. Baldi, P. Frasca, M. Monache // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. — 2021. — Vol. 22, no. 8. — P. 4998—5008.
189. Cooperative Formation of Autonomous Vehicles in Mixed Traffic Flow: Beyond Platooning / K. Li, J. Wang, Y. Zheng // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. — 2022. — Vol. 23, no. 9. — P. 15951—15966.
190. Self-deployment of mobile robotic networks: an algorithm for decentralized sweep boundary coverage / A. Semakova, K. Ovchinnikov, A. Matveev // Robotica. — 2017. — Vol. 35, no. 9. — P. 1816—1844.
191. Cooperative surveillance of unknown environmental boundaries by multiple nonholonomic robots / K. Ovchinnikov, A. Semakova, A. Matveev // Robotics and Autonomous Systems. — 2015. — Vol. 72. — P. 164—180.

192. Distributed 3D Navigation of Swarms of Non-Holonomic UAVs for Coverage of Unsteady Environmental Boundaries / A. Matveev, A. Semakova // *Drones*. — 2022. — Vol. 6, no. 2. — P. 30.
193. Optimal Coverage in Wireless Sensor Networks / W. Wu, Z. Zhang, W. Lee, D. Du // *Springer Optimization and Its Applications*. Vol. 162 / ed. by P. Pardalos, T. My. — Berlin : Springer-Verlag, 2020. — P. 3—40.
194. A survey on barrier coverage with sensors / F. Wu, Y. Gui, Z. Wang, X. Gao, G. Chen // *Frontiers of Computer Science*. — 2016. — Vol. 10, no. 6. — P. 968.
195. Global Existence of Solutions of Differential Inclusions / T. Tanicuchi // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. — 1992. — Vol. 166. — P. 41—51.
196. Existence of global solutions to differential inclusions; A priori bounds / O. Cârjă, A. Lazu // *Mathematica Bohemica*. — 2012. — Vol. 137, no. 2. — P. 187—198. — DOI: 10.21136/MB.2012.142865.
197. Theoretical Study Regarding the Fuel Consumption Performance for a Vehicle Equipped with a Mechanical Transmission / A. Dobre // *Procedia Manufacturing*. — 2019. — Vol. 32. — P. 537—544.
198. A Survey on Barrier Coverage Problem in Directional Sensor Networks / D. Tao, T. Wu // *IEEE Sensors Journal*. — 2015. — Vol. 15, no. 2. — P. 876—885.
199. A Survey on Monitoring Quality Assessment for Wireless Visual Sensor Networks / T. Jesus, D. Costa, P. Portugal, F. Vasques // *Future Internet*. — 2022. — Vol. 14, no. 7. — P. 213.
200. Chassis Handbook: Fundamentals, Driving Dynamics, Components, Mechatronics, Perspectives / B. Heißing, M. Ersoy. — First. — Wiesbaden : Vieweg+Teubner, 2011.
201. Chattering reduction using multiphase sliding mode control / H. Lee, V. Utkin, A. Malinin // *International Journal of Control*. — 2009. — Vol. 82, no. 9. — P. 1720—1737.
202. Conventional and high order sliding mode control / V. Utkin, A. Poznyak, Y. Orlov, A. Polyakov // *Journal of the Franklin Institute*. — 2020. — Vol. 357, no. 15. — P. 10244—10261.

203. Recent Advances in Sliding Modes: From Control to Intelligent Mechatronics / L. Fridman, J. Moreno, B. Bandyopadhyay, S. Kamal, A. Chalanga // / ed. by X. Yu, O. Efe. — Spriner Bisunes Media, 2015. — Chap. Continuous Nested Algorithms: The Fifth Generation of Sliding Mode Controllers. P. 5—35.
204. The theory of min-max, with applications / J. Danskin // SIAM Journal on App. Math. — 1966. — Vol. 14, no. 4. — P. 641—644.
205. Ordinary Differential Equations / P. Hartman. — Second. — Boston : Birkhäuser, 1982.
206. The theory of min-max, with applications / J. Danskin // SIAM Journal on Applied Mathematics. — 1966. — Vol. 14, no. 4. — P. 641—644.
207. Stability of continuous-time consensus algorithms for switching networks with bidirectional interaction / A. Matveev, I. Novitsyn, A. Proskurnikov //. — 07/2013. — P. 1872—1877.
208. Ordinary Differential Equations / P. Hartman. — Boston : Birkhäuser, 1982.
209. Matrix Analysis / R. Horn, C. Johnson. — 2nd. — NY : Camb. Univ. Press, 2013.
210. Nonlinear Systems / H. Khalil. — 2nd. — Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, 1996.
211. Matrix Analysis / R. Horn, C. Johnson. — Cambridge : Cambridge University Press, 1990.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Приложение к Главе 1

А.1. Доказательства результатов, приведённых в разделе 1.3

Рассматривается поведение команды роботов в замкнутой системе. Предполагается, что условия теоремы 1.3.3 выполнены. Далее «п.в.» означает «почти для всех», а «п.в.в.» — «почти всюду».

Сначала более явно опишем поведение системы при выполнении условий первой строки в (1.7) и (1.8).

Лемма А.1. *При $v_i \geq \underline{v}$ выполняются уравнения:*

$$\ddot{x}_i = \bar{a}^x \cdot \mathbf{sgn} [v_i^x - \dot{x}_i], \quad \ddot{y}_i = \bar{a}^y \cdot \mathbf{sgn} [\Xi(d_i^+) - \Xi(d_i^-) - \dot{y}_i]. \quad (\text{A.1})$$

Доказательство. Поскольку $v_i \geq \underline{v}$, активна первая строка в (1.7) и (1.8), а аргументы $\mathbf{sat}[\cdot]$ лежат в пределах насыщения согласно (1.6) и (1.15). Таким образом, (1.7) и (1.8) означают:

$$a_i(t) = a_i^x \cos \theta_i + a_i^y \sin \theta_i, \quad \omega_i(t) = v_i^{-1} [a_i^y \cos \theta_i - a_i^x \sin \theta_i].$$

Первая формула в (А.1) следует из (1.6) и наблюдений:

$$\ddot{x}_i \stackrel{(1.1)}{=} a_i \cos \theta_i - \omega_i v_i \sin \theta_i = (a_i^x \cos \theta_i + a_i^y \sin \theta_i) \cos \theta_i - (a_i^y \cos \theta_i - a_i^x \sin \theta_i) \sin \theta_i = a_i^x.$$

С учётом (1.4), вторая формула в (А.1) доказывается аналогично. □

Следующая лемма рассматривает начальный (возможно, малый) временной интервал.

Лемма А.2. *Существует $t_0 > 0$ такое, что для любого $t \in (0, t_0)$: 1) $\dot{x}_i(t) = v_i(t) = \bar{a}t \in (0, \underline{v})$, $\theta_i(t) = 0$, $\dot{y}_i(t) = 0$; 2) взаимное расположение роботов не меняется, а $v_i(t) \geq \underline{v}$, $\dot{x}_i(t) \geq \underline{v} \forall t \geq t_0$.*

Доказательство. Для любого робота i множество $\{t \geq 0 : v_i(t) < \underline{v}\}$ содержит 0 по предположению 1.3.1. Пусть $[0, \tau_i)$ — его левая связная компонента, где $\tau_i \in (0, \infty]$. Для $t \in [0, \tau_i)$: $v_i(t) < \underline{v} \Rightarrow a_i(t) = \bar{a} \cdot \mathbf{sgn} [v_i^x(t) - \dot{x}_i(t)]$, $\omega_i(t) = -\bar{\omega} \cdot \mathbf{sgn} \dot{y}_i$ согласно (1.7) и (1.8). При этом $|\dot{x}_i(t)| \leq v_i(t) < \underline{v}$, а также:

$$v_i^x \stackrel{(1.5)}{=} v_{\text{des}} + \frac{1}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ji}} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ji} \underbrace{\Upsilon[x_j - x_i]}_{\geq -\bar{\Upsilon}_- \text{ по (2.7)}} \geq v_{\text{des}} - \bar{\Upsilon}_- \stackrel{(1.19)}{>} \underline{v}. \quad (\text{A.2})$$

Следовательно, $a_i(t) = \bar{a}$ и $v_i(t) = \bar{a}t \forall t \in [0, \tau_i)$ по (1.1). Значит, $\tau_i < \infty$, $v_i(\tau_i) = \underline{v}$, и $\tau_i = \tau := \underline{v}/\bar{a} \forall i$. Для $t \in (0, \tau)$: из (1.1) следует $\mathbf{sgn} \dot{y}_i = \mathbf{sgn} \sin \theta_i(t)$, а значит, $\dot{\theta}_i(t) = -\bar{\omega} \cdot \mathbf{sgn} \sin \theta_i(t)$,

где $\theta_i(0) = 0$ по предположению 1.3.1. Согласно [91, Теорема 2, Разд. 10], $\theta_i = 0$ — единственное решение этого ОДУ с разрывной п.ч. при $\theta_i(0) = 0$. Таким образом, для $t \in [0, \tau]$: $\theta_i(t) = 0$, $v_i(t) = \bar{a}t \forall i$ — роботы движутся вдоль коридора с общим вектором скорости, сохраняя взаимное расположение.

Покажем, что $v_i(t) \geq \underline{v} \forall t \geq t_0 := \tau$. Предположим противное: существует $\tau_+ \geq \tau$, где $v_i(\tau_+) = \underline{v}$ и $v_i(t) < \underline{v}$ для $t > \tau_+$, $t \approx \tau_+$. Для таких t : $\dot{x}_i(t) \leq v_i(t) < \underline{v}$ и

$$\dot{v}_i \stackrel{(1.1)}{=} a_i(t) \stackrel{(1.7)}{=} \bar{a} \cdot \mathbf{sgn}[v_i^x(t) - \dot{x}_i(t)] \stackrel{(A.2)}{=} \bar{a} > 0.$$

Из $v_i(\tau_+) = \underline{v}$ следует $v_i(t) > \underline{v}$ для $t > \tau_+$, $t \approx \tau_+$, что противоречит исходному условию. Следовательно, $v_i(t) \geq \underline{v} \forall t \geq t_0$. Аналогично доказывается $\dot{x}_i(t) \geq \underline{v} \forall t \geq t_0$ с использованием первого уравнения из (A.1). $\square$

Для $t \in (0, t_0)$ ординаты $y_i(t)$ не меняются ($\dot{y}_i(t) = 0$ по лемме A.2). При $t = 0$ они различны и отличны от стен по предположению 1.3.1. Отсюда:

Следствие A.3. Роботы не сталкиваются друг с другом и со стенами коридора при $t \leq t_0$, и $\dot{x}_i(t) > 0 \forall t > 0, i$.

Отсутствие столкновений при $t > t_0$ будет доказано далее (см. лемму A.13 и доказательство теоремы 1.3.3).

Лемма A.4. Для всех $t \geq 0$ и любого робота выполняется:

$$\dot{x}_i \leq v_{\text{des}} + \bar{\Upsilon}_+, \quad |\dot{y}_i| \leq \bar{\Xi} := \Xi(R_{\text{sen}}). \quad (\text{A.3})$$

Доказательство. Предположим, что первое неравенство в (A.3) нарушено для робота i в некоторый момент. Тогда из предположения 1.3.1, (1.19) и леммы A.2 следует, что множество $\{t > t_0 : \dot{x}_i(t) > v_{\text{des}} + \bar{\Upsilon}_+\}$ непусто. Для левого конца $\tau \geq t_0$ любой его компоненты: $\dot{x}_i(\tau) = v_{\text{des}} + \bar{\Upsilon}_+$, $\dot{x}_i(t) > v_{\text{des}} + \bar{\Upsilon}_+ \forall t > \tau, t \approx \tau$. Для таких t : леммы A.1 и A.2 дают $\ddot{x}_i(t) = \bar{a}^x \cdot \mathbf{sgn}[v_i^x(t) - \dot{x}_i(t)]$. Используя верхнюю оценку $\Upsilon(\cdot) \leq \bar{\Upsilon}_+$ в (A.2), получаем: $v_i^x(t) \leq v_{\text{des}} + \bar{\Upsilon}_+$. Следовательно, $\ddot{x}_i(t) < 0$, и из $\dot{x}_i(\tau) = v_{\text{des}} + \bar{\Upsilon}_+$ следует $\dot{x}_i(t) < v_{\text{des}} + \bar{\Upsilon}_+ \forall t > \tau, t \approx \tau$, что противоречит условию. Аналогично доказывается второе неравенство. $\square$

Лемма A.4 и второе неравенство в (1.19) влекут следующее.

Следствие A.5. Любой робот соблюдает верхнюю границу скорости, ниже которой модель (1.1) действительна, т. е. $v_i(t) \leq \bar{v} \forall t \geq 0$.

Благодаря (1.3)–(1.11), сумму можно взять по всем роботам в определении (1.5) v_i^x , поскольку $w_{ji}(t) = 0 \forall j \notin \mathcal{N}_i(t)$:

$$v_i^x = v_{\text{des}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^N w_{ji}} \sum_{j=1}^N w_{ji} \Upsilon[x_j - x_i]. \quad (\text{A.4})$$

По (1.11) веса из (1.3) плавно зависят от состояния $\{(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t)\}_{i=1}^N$ роботизированной команды. Поэтому функция $S_i := \dot{x}_i - v_i^x$ состояния (замкнутой системы) также является гладкой.

Теперь покажем, что стандартное достаточное условие для скользящего движения по поверхности разрыва $S_i = 0$ правой части первого уравнения в (A.1) выполняется при $t > t_0$, где t_0 взято из Леммы A.2.

Лемма A.6. *Существует положительное число $\lambda > 0$ такое, что для $t > t_0$ и любого робота,*

$$\dot{S}_i \operatorname{sgn} S_i \leq -\lambda \quad \text{всякий раз, когда} \quad S_i \neq 0. \quad (\text{A.5})$$

Доказательство. Принимая во внимание лемму A.1 и A.2, видим, что

$$\begin{aligned} -\dot{S}_i \operatorname{sgn} S_i &= -\operatorname{sgn} S_i [\ddot{x}_i - \dot{v}_i^x] = \bar{a}^x + \dot{v}_i^x \operatorname{sgn} S_i, \\ \dot{v}_i^x &\stackrel{(\text{A.4})}{=} -\frac{\sum_{j=1}^N \dot{w}_{ji}}{\sum_{j=1}^N w_{ji}} \sum_{j=1}^N \frac{w_{ji}}{\sum_{j=1}^N w_{ji}} \Upsilon[x_j - x_i] + \frac{1}{\sum_{j=1}^N w_{ji}} \sum_{j=1}^N \dot{w}_{ji} \Upsilon[x_j - x_i] + \\ &\quad + \frac{1}{\sum_{j=1}^N w_{ji}} \sum_{j=1}^N w_{ji} \Upsilon'[x_j - x_i] (\dot{x}_j - \dot{x}_i); \\ |\dot{w}_{ji}| &\stackrel{(1.3)}{=} \left| R_{\text{sen}}^{-1} W'[\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|/R_{\text{sen}}] W[|x_j - x_i|/\delta] \frac{d}{dt} \|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\| + \right. \\ &\quad \left. + \delta^{-1} W' [|x_j - x_i|/\delta] W[\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|/R_{\text{sen}}] \frac{d}{dt} |x_j - x_i| \right| \\ &\stackrel{(1.18)}{\leq} \overline{W} \overline{W}' \left[R_{\text{sen}}^{-1} \left| \frac{d}{dt} \|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\| \right| + \delta^{-1} \left| \frac{d}{dt} |x_j - x_i| \right| \right] \stackrel{(1.20), (\text{A.3}), \text{Следствие A.5}}{\leq} \kappa. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

(Напомним, что (1.20) — это определение κ .) Из этого следует, что

$$|\dot{v}_i^x| \stackrel{w_{ii}=1, (1.9)}{\leq} 2N\kappa \max\{\overline{\Upsilon}_-, \overline{\Upsilon}_+\} + \overline{\Upsilon}' \frac{1}{\sum_{j=1}^N w_{ji}} \sum_{j=1}^N w_{ji} |\dot{x}_j - \dot{x}_i| \stackrel{(\text{A.3})}{\leq} 2N\kappa \max\{\overline{\Upsilon}_-, \overline{\Upsilon}_+\} + 2\overline{\Upsilon}' [v_{\text{des}} + \overline{\Upsilon}_+].$$

Из-за (A.6) это подразумевает (A.5) с $\lambda := \bar{a}^x - 2N\kappa \max\{\overline{\Upsilon}_-, \overline{\Upsilon}_+\} + 2\overline{\Upsilon}' [v_{\text{des}} + \overline{\Upsilon}_+]$, где $\lambda > 0$ по (1.19). $\square$

Следствие A.7. *При $t > t_0$ поверхность, описываемая $S_i = 0$, скользит.*

Лемма A.8. *Утверждение iii) теоремы 1.3.2 истинно, и существует $t_* \geq 0$ такое, что $S_i(t) = 0 \forall t \geq t_*$ и всех i .*

Доказательство. В iii), $\varsigma(t) = \max_{i,j} |z_i(t) - z_j(t)|$, где $z_i(t) := x_i(t) - v_{\text{des}} \cdot t$. По лемме A.2, $z_j(t) - z_i(t)$ и, тем самым, $\varsigma(t)$ остаются постоянными для $t \in [0, t_0]$, и $\dot{z}_i(t_0) = \underline{v} - v_{\text{des}} < 0$ по (1.19). Так что остаётся рассмотреть времена $t > t_0$. Для них

$$\ddot{z}_i = \ddot{x}_i \stackrel{\text{Лемма A.1}}{=} -\bar{a}^x \cdot \operatorname{sgn} S_i, \quad \text{где} \quad S_i \stackrel{(\text{A.4})}{=} \dot{z}_i - \frac{1}{\sum_{j=1}^N w_{ji}} \sum_{j=1}^N w_{ji} \Upsilon(z_j - z_i). \quad (\text{A.7})$$

Как и в (A.2), $-S_i(t_0) \geq -\overline{\Upsilon}_- - \dot{z}_i(t_0) = v_{\text{des}} - \underline{v} - \overline{\Upsilon}_- > 0$ на (1.19). Это и (A.5), (A.7) подразумевают существование $\tau_i > t_0$ такого, что $S_i(t) < 0$, $\dot{z}_i(t) = \bar{a}^x$, $\dot{z}_i(t) = \underline{v} - v_{\text{des}} + \bar{a}^x(t - t_0)$ для $t \in [t_0, \tau_i]$ и $S_i(t) = 0$ для $t \geq \tau_i$.

Положим $m_+(t) := \max_j z_j(t)$, $m_-(t) := \min_j z_j(t)$, $\mathcal{M}_{\pm}(t) := \{i : z_i(t) = m_{\pm}(t)\}$, $t_* := \max\{\tau_0, \dots, \tau_{N-1}\}$. По первой формуле в (A.7) и определению SM [91], $|\ddot{z}_i(t)| < \bar{a}^x$, если робот i находится в SM в момент времени t . Из этого следует, что

- По мере роста t $\mathcal{M}_-(t)$ не поглощает роботов, которые не находятся в SM;
- Если некоторый робот из $\mathcal{M}_-(s)$ находится в SM, то $\mathcal{M}_-(t)$ содержит только таких роботов для $t > s, t \approx s$;
- Существует $s_- \leq t_*$ такой, что все роботы из $\mathcal{M}_-(t)$ не находятся в SM для $t \in [t_0, s_-)$, и находятся в SM для $t > s_-$;
- Хотя $\mathcal{M}_+(t)$ сохраняет роботов, не находящихся в SM, по мере роста t , этот набор не поглощает новых роботов и теряет членов, которые начинают SM;
- Существует $s_+ \leq t_*$ такое, что все роботы из $\mathcal{M}_+(t)$ не находятся в SM для $t \in [t_0, s_+)$, и находятся в SM для $t > s_+$, тогда как множество $\mathcal{M}_+(t)$ сокращается, когда t пробегает от t_0 до s_+ .

По теореме Данскина [204], функция $m_{\pm}(\cdot)$ абсолютно непрерывна и $\dot{m}_{\pm}(t) = \dot{z}_{i_{\pm}^{\pm}}(t)$ п.в. t , где $i_{\pm}^{\pm} \in \mathcal{M}_{\pm}(t)$. Для $t > s_{\pm}$ и $i := i_{\pm}^{\pm}$ имеем $\mp \dot{z}_{i_{\pm}^{\pm}}(t) = \frac{\mp 1}{\sum_{j=1}^N w_{ji}} \sum_{j=1}^N w_{ji} \Upsilon[z_j - m_{\pm}(t)] \geq 0$ по (1.9), (1.3), и (1.11). Следовательно

$$\dot{m}_{\pm}(t) = \underline{v} - v_{\text{des}} + \bar{a}^x(t - t_0) \forall t \in [t_0, s_{\pm}], \quad \pm \dot{m}_{\pm}(t) \leq 0 \text{ п.в. } t \geq s_{\pm}. \quad (\text{A.8})$$

По (A.7), $\dot{z}_i \leq \bar{a}^x$ п.в. $t \geq t_0$, независимо от того, находится ли он в SM или нет. Следовательно $\dot{z}_i(t) \leq \underline{v} - v_{\text{des}} + \bar{a}^x(t - t_0) \forall t \geq t_0$ и так

$$\dot{m}_+(t) \leq \underline{v} - v_{\text{des}} + \bar{a}^x(t - t_0) \text{ п.в. } t \geq t_0. \quad (\text{A.9})$$

Выбирая $i \in \mathcal{M}_+(s_+)$ и $k \in \mathcal{M}_+(s_-)$, видим, что

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(s_+) &= \underline{v} - v_{\text{des}} + \bar{a}^x(s_+ - t_0) = \frac{1}{\sum_{j=1}^N w_{ji}} \sum_{j=1}^N w_{ji} \Upsilon[z_j - m_+(t)] \leq 0, \\ \dot{z}_k(s_-) &= \underline{v} - v_{\text{des}} + \bar{a}^x(s_- - t_0) = \frac{1}{\sum_{j=1}^N w_{jk}} \sum_{j=1}^N w_{jk} \Upsilon[z_j - m_-(t)] \geq 0. \end{aligned}$$

Итак, $s_- \geq s_+$, и $\dot{m}_+(t) - \dot{m}_-(t) \leq 0$ п.в. $t \geq t_0$ по (A.8), (A.9). Осталось заметить, что $\varsigma(t) = m_+(t) - m_-(t)$. $\square$

Принимая во внимание предположение 1.3.1, приходим к следующему.

Следствие А.9. Для всех роботов i, j и в любой момент времени $t \geq 0$ имеем $|x_i(t) - x_j(t)| \leq \varsigma(0) < \delta$.

Введём два фиктивных робота с номерами -1 и N , соответствующим ординатам $-w/2$ и $w/2$ и неопределёнными абсциссами. Символ $\mathfrak{D}$ обозначает область в пространстве состояний, где $t \geq t_0$ и $y_i \neq y_j \forall i \neq j$.

Лемма А.10. Находясь в $\mathfrak{D}$, величина $\Sigma_i := \dot{y}_i - \Xi(d_i^+) + \Xi(d_i^-)$ непрерывно зависит от состояния.

Доказательство. Разрывы в Σ_i возникают только из-за скачков $d_i^{\pm}$. По (1.2) они могут возникнуть только в следующих ситуациях: 1) выполняется первый вариант из (1.2) и либо $|x_i - x_j| = \delta$, либо $\|y_i - y_j\| = \sqrt{R_{\text{sen}}^2 - \delta^2}$ для робота j , который поставляет $\min$ в (1.2); 2) выполняется второй вариант и $|y_i \mp \frac{w}{2}| = \sqrt{R_{\text{sen}}^2 - \delta^2}/2$; 3) $y_i = y_j$ для некоторого $i \neq j$. Случай 3) не выполняется по определению $\mathfrak{D}$, и $|x_i - x_j| \neq \delta$ по следствию А.9. Остается заметить, что в случаях 1) и 2), $d_i^{\pm} > R_{\Xi}$ по (1.16) и поэтому $d_i^{\pm}$ находится в зоне, где функция $\Xi(\cdot)$ из (1.4) постоянна благодаря (1.9) и поэтому игнорирует изменения аргумента. $\square$

Нижеследующее является аналогом леммы А.6, которая рассматривает не первое, а второе уравнение в (А.1).

Лемма А.11. *Существует положительное число $\lambda_* > 0$ такое, что в $\mathfrak{D}$ для всех роботов i , выполняется следующее:*

$$\dot{\Sigma}_i \operatorname{sgn} \Sigma_i \leq -\lambda_* \quad \text{всякий раз, когда} \quad \Sigma_i \neq 0. \quad (\text{А.10})$$

Доказательство. Определение $\mathfrak{D}$ подразумевает, что для достаточно малой окрестности любого состояния из $\mathfrak{D}$ существует перечисление роботов такое, что всюду в этой окрестности выполняются следующие неравенства

$$y_{-1} < y_0 < y_1 < \dots < y_{N-1} < y_N. \quad (\text{А.11})$$

Тогда замечаем, что благодаря (1.9) и (1.2),

$$\Xi[d_i^+] = \Xi[\Delta_i^y], \quad \Xi[d_i^-] = \Xi[\Delta_{i-1}^y] \quad \forall i = 0, \dots, N-1, \quad \text{где} \quad (\text{А.12})$$

$$\Delta_i^y := y_{i+1} - y_i \quad \forall i = 0, \dots, N-2, \quad \Delta_{N-1}^y := 2(y_N - y_{N-1}) = w - 2y_{N-1}, \quad (\text{А.13})$$

$$\Delta_{-1}^y := 2(y_0 - y_{-1}) = 2y_0 - w.$$

Так что $|\frac{d}{dt} \Xi[d_i^\pm]| \leq 2\overline{\Xi'} \overline{\Xi}$ по (А.3) и (1.17). Принимая во внимание Лемму А.1, А.2, получаем, что

$$\dot{\Sigma}_i \operatorname{sgn} \Sigma_i = \left[-\bar{a}^y \operatorname{sgn} \Sigma_i - \frac{d}{dt} \Xi(d_i^+) + \frac{d}{dt} \Xi(d_i^-) \right] \cdot \operatorname{sgn} \Sigma_i = -\bar{a}^y + \mu_i,$$

где $|\mu_i| \leq 4\overline{\Xi'} \overline{\Xi}$. Итак, (А.10) выполняется с $\lambda_* := \bar{a}^y - 4\overline{\Xi'} \overline{\Xi}$. Остается заметить, что $\lambda_* > 0$ по (1.17). $\square$

Следствие А.12. *В области $\mathfrak{D}$ поверхность, описываемая уравнением $\Sigma_i = 0$, является скользящей.*

Лемма А.13. *Роботов можно пронумеровать так, чтобы (А.11) выполнялось для всех $t \geq 0$.*

Доказательство. В силу предположения 1.3.1 их можно пронумеровать так, чтобы (А.11) выполнялось для $t = 0$. По лемме А.2, $\dot{y}_i(t_0) = 0$ для момента t_0 , взятого из леммы А.2, и неравенства из (А.11) сохраняют силу для $t \in [0, t_0]$. Осталось проанализировать $t > t_0$.

Предположим, что (А.11) не выполняется для всех $t \geq t_0$. Тогда существует $\tau > t_0$ такое, что (А.11) выполняется для $t \in [t_0, \tau]$ и при $t = \tau$ множество роботов $\{-1, \dots, N\}$ разбивается на непересекающиеся подмножества $I_1, \dots, I_s$ такие, что $I_k = \{i_k^-, \dots, i_k^+\}$, $i_k^- \leq i_k^+$, $i_k^+ + 1 = i_{k+1}^-$, $y_{i_k^-}(\tau) = \dots = y_{i_k^+}(\tau)$ и $y_{i_k^+}(\tau) < y_{i_{k+1}^-}(\tau)$, тогда как по крайней мере один набор не является одноэлементным. Пусть I_k будет одним из них. Так как $y_{-1} = -w/2 < w/2 = y_N$, есть другой набор I_l либо выше, либо ниже I_k . Сосредоточимся на первом варианте, второй рассматривается аналогично. Тогда $i_k^+ < N$, $y_{i_k^+}(\tau) < y_{i_{k+1}^-}(\tau)$.

По (А.10) и Следствию А.12 любой робот i связан с $\tau_i \in [t_0, \tau]$ таким образом, что $\Sigma_i(t) \neq 0 \quad \forall t \in [t_0, \tau_i]$ и $\Sigma_i(t) = 0 \quad \forall t \in (\tau_i, \tau]$. Тогда $\Sigma_i(t)$ сохраняет свой знак неизменным для $t \in [t_0, \tau_i]$

и поэтому $\text{sgn } \Sigma_i(t) = \text{sgn } \Sigma_i(t_0) = -\text{sgn } \{\Xi[d_i^+(t_0)] - \Xi[d_i^-(t_0)]\}$. Следовательно, для $t \in [t_0, \tau_i)$, имеем по (A.1),

$$\ddot{y}_i(t) = \bar{a}^y \text{sgn } \{\Xi[d_i^+(t_0)] - \Xi[d_i^-(t_0)]\} \stackrel{(A.12)}{=} \bar{a}^y \text{sgn } \{\Xi[\Delta_i^y(t_0)] - \Xi[\Delta_{i-1}^y(t_0)]\} \stackrel{(1.10)}{=} \bar{a}^y \text{sgn } \{\Delta_i^y(t_0) - \Delta_{i-1}^y(t_0)\}.$$

Если $\tau_i > t_0$, то тем самым $\Delta_i^y(t_0) \neq \Delta_{i-1}^y(t_0)$ и хотя бы одно из этих двух чисел лежит в $(0, R_\Xi)$. Также $\dot{y}_i(t_0) = 0$ даёт, что для $t \in (t_0, \tau_i)$, имеем $\dot{y}_i(t) \neq 0$ и $\text{sgn } \dot{y}_i(t) = \text{sgn } \{\Xi[\Delta_i^y(t_0)] - \Xi[\Delta_{i-1}^y(t_0)]\}$. Так как $\Xi[\Delta_i^y(t)] - \Xi[\Delta_{i-1}^y(t)]$ меняет знак, пока t растёт, $-\Sigma_i(t) = \Xi[\Delta_i^y(t)] - \Xi[\Delta_{i-1}^y(t)] - \dot{y}_i(t)$ имеет знак, противоположный знаку при $t = t_0$. Из этого следует, что $\text{sgn } \{\Xi[\Delta_i^y(t)] - \Xi[\Delta_{i-1}^y(t)]\} = \text{sgn } \{\Delta_i^y(t_0) - \Delta_{i-1}^y(t_0)\}$ остаётся неизменным для $t \in [t_0, \tau_i)$.

Для введенного выше k положим $i := i_k^+$. Предположим, что $\tau_i = \tau$. Поскольку $\Delta_i^y(\tau) > 0 = \Delta_{i-1}^y(\tau)$, то имеем $\Delta_i^y(t) > \Delta_{i-1}^y(t) \forall t < \tau, t \approx \tau$. Таким образом, согласно вышесказанному, $\ddot{y}_i(t) = \bar{a}^y$ п.в. $t \in [t_0, \tau]$, тогда как $|\ddot{y}_{i-1}(t)| \leq \bar{a}^y$ по (A.1) и определение решения Филлипова [91]. Следовательно, $y_{i-1}(t_0) < y_i(t_0)$ и $\dot{y}_{i-1}(t_0) = \dot{y}_i(t_0)$ влекут, что $y_{i-1}(\tau) < y_i(\tau)$, что нарушает выбор k . Таким образом, $\tau_{i_k^+} < \tau$ и поэтому по (A.12), $\dot{y}_{i_k^+}(t) = \Xi[\Delta_{i_k^+}^y(t)] - \Xi[\Delta_{i_k^+-1}^y(t)] > 0$ для $t < \tau, t \approx \tau$.

Рассуждая аналогично, заключаем, что если $i_k^- \geq 0$, то $\dot{y}_{i_k^-}(t) < 0$ для $t < \tau, t \approx \tau$. Однако это противоречит отношениям $y_{i_k^-}(t) < y_{i_k^+}(t)$ и $y_{i_k^-}(\tau) = y_{i_k^+}(\tau)$. Таким образом, $i_k^- = -1$. Но тогда $\dot{y}_{i_k^-}(t) = 0$ для $t < \tau, t \approx \tau$, что снова приводит к указанному выше противоречию. В целом, видно, что (A.11) не перестаёт быть истинным для всех $t \geq t_0$. $\square$

Лемма A.13 показывает, что требование $y_i \neq y_j \forall i \neq j$ из определения $\mathfrak{D}$ “автоматически” выполняется для траекторий роботизированной команды. Это приводит к следующему.

Следствие A.14. Лемма A.11 и следствие A.12 остаются в силе, если определение $\mathfrak{D}$ ослаблено до $t \geq t_0$.

Используя (A.10) и рассуждая, как в доказательстве леммы A.8, приходим к следующему.

Следствие A.15. Существует $t_{**} \geq t_0$ такой, что $\Sigma_i(t) = 0 \forall t \geq t_{**}$ и все роботы i .

Лемма A.16. Для $t \geq t_{**}$ функция $g(t) := \min_{i=-1, \dots, N-1} \Delta_i^y(t)$ не убывает:

Доказательство. По теореме Данскина [204], $g(\cdot)$ абсолютно непрерывна и $\dot{g}(t) = \dot{\Delta}_{i_t^0}^y(t)$ п.в. t , где i_t^0 даёт $\min_i \Delta_i^y(t)$. Так как $\frac{1}{2}\Delta_{-1}^y(t) + \sum_{i=0}^{N-2} \Delta_i^y(t) + \frac{1}{2}\Delta_{N-1}^y(t) = w$, то заключаем, что $g(t) \leq \frac{w}{N}$.

Рассмотрим три возможных варианта I–III) по отдельности.

I) $i^0(t) = 0, \dots, N-2$. Тогда

$$\dot{g}(t) = \dot{\Delta}_{i_t^0}^y(t) \stackrel{(A.1)}{=} \dot{y}_{i^0(t)+1}(t) - \dot{y}_{i^0(t)}(t) \stackrel{\Sigma_i=0, (A.12)}{=} \Xi[\Delta_{i^0(t)+1}^y(t)] - 2\Xi[\Delta_{i^0(t)}^y(t)] + \Xi[\Delta_{i^0(t)-1}^y(t)] \geq 0. \quad (A.14)$$

II) $i^0(t) = -1$. Аналогичные рассуждения показывают, что $g(t) = 2[y_0(t) - y_{-1}(t)] = 2|y_0(t) + w/2|$ и

$$\dot{g}(t) = 2\dot{y}_0(t) \stackrel{\Sigma_i=0, (A.12)}{=} \Xi[\Delta_0^y(t)] - \Xi[\Delta_{-1}^y(t)] \geq 0. \quad (A.15)$$

III) $i^0(t) = N-1$. Рассуждая аналогично, снова видим, что $\dot{g}(t) \geq 0$.

Таким образом, $\dot{g}(t) \geq 0$ п.в. t в любом возможном случае, что завершает доказательство. $\square$

Поскольку $g(t_{**}) > 0$ по Лемме A.13, приходим к следующему.

Следствие A.17. *Существует $\beta > 0$ такое, что $y_{i+1}(t) - y_i(t) \geq \beta \forall i = -1, \dots, N-1, t \geq t_{**}$.*

Точка ω -предела отображения $\mathbf{Y}(t) := [y_{-1}(t), y_0(t), \dots, y_N(t)]$ — это предел $\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{Y}(t_j)$, связанный с некоторой неограниченной последовательностью $t_1 < t_2 < \dots < t_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$. Поскольку $y_j(t) \in [-w/2, w/2] \forall t \geq 0$, множество $\mathfrak{Y}$ всех точек ω -предела непусто и компактно. Оно может содержать много элементов $\mathcal{Y} = [y_{-1}^\infty, \dots, y_N^\infty]$; они называются ω -предельными распределениями. По следствию A.17, $y_{-1}^\infty = -w/2 < y_0^\infty < \dots < y_N^\infty = w/2$. Аналогично (A.1), положим

$$\Delta_i^\infty(\mathcal{Y}) := \begin{cases} y_{i+1}^\infty - y_i^\infty & \text{для } i = 0, \dots, N-2, \\ 2[y_{i+1}^\infty - y_i^\infty] & \text{для } i = -1, N-1. \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

Лемма A.18. *Для любого ω -предельного распределения $\mathcal{Y}$ справедливо следующее неравенство:*

$$\Delta_i^\infty(\mathcal{Y}) \geq \frac{w}{N} \quad \forall i = -1, \dots, N-1. \quad (\text{A.17})$$

Доказательство. Предположим, что (A.17) неверно для ω -предельного распределения $\mathcal{Y}_* \in \mathfrak{Y}$. Тогда минимум непрерывного отображения

$$m(\mathcal{Y}) := \min_{i=-1, \dots, N-1} \Delta_i^\infty(\mathcal{Y}) \quad (\text{A.18})$$

над компактным множеством $\mathfrak{Y}$ меньше w/N . Это достигается при некотором ω -предельном распределении $\overline{\mathcal{Y}} = [\overline{y}_{-1}, \dots, \overline{y}_N]$ по теореме Вейерштрасса. По (A.18), $m(\overline{\mathcal{Y}}) = \Delta_i^\infty(\overline{\mathcal{Y}})$ для некоторого i . Между тем, это уравнение не может быть верным для всех i , так как

$$\sum_{i=0}^{N-2} \Delta_i^\infty(\overline{\mathcal{Y}}) + \frac{1}{2}[\Delta_{-1}^\infty(\overline{\mathcal{Y}}) + \Delta_{N-1}^\infty(\overline{\mathcal{Y}})] = w \quad (\text{A.19})$$

и $m(\overline{\mathcal{Y}}) < w/N$. Следовательно, существует индекс $i \leq N-2$ такой, что либо

$$\Delta_i^\infty(\overline{\mathcal{Y}}) = m(\overline{\mathcal{Y}}) < \frac{w}{N} \quad \text{и} \quad \Delta_{i+1}^\infty(\overline{\mathcal{Y}}) > m(\overline{\mathcal{Y}}) \quad \text{или} \quad (\text{A.20})$$

$$\Delta_{i+1}^\infty(\overline{\mathcal{Y}}) = m(\overline{\mathcal{Y}}) < \frac{w}{N} \quad \text{и} \quad \Delta_i^\infty(\overline{\mathcal{Y}}) > m(\overline{\mathcal{Y}}). \quad (\text{A.21})$$

Пусть $t_1 < \dots < t_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ будет временной последовательностью, связанной с ω -предельным распределением $\overline{\mathcal{Y}}$. Отбрасывая некоторые члены в этой последовательности, гарантируется, что $t_{k+1} \geq t_k + 1, t_k > t_{**} + 1 \forall k$. Отметим также, что для всех j ,

$$\Delta_j^y(t_k) \rightarrow \Delta_j^\infty(\overline{\mathcal{Y}}) \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty \quad \text{когда} \quad y_{j'}(t_k) \rightarrow \overline{y}_{j'}^\infty \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty \quad \forall j'. \quad (\text{A.22})$$

Случай (A.20). Основываясь на (A.20), выбираем $\varkappa > 0$ так, что $\Delta_i^\infty(\overline{\mathcal{Y}}) = m(\overline{\mathcal{Y}}) < \min \left\{ \frac{w}{N} - 3\varkappa; \Delta_{i+1}^\infty(\overline{\mathcal{Y}}) - 5\varkappa \right\}$ Далее символ $\alpha(k)$ (с возможными индексами) обозначает

величину, зависящую от k , которая стремится к 0 при $k \rightarrow \infty$. Заметим, что $|\dot{\Delta}_i^y(t)| \leq c := 4\bar{\Xi}$ по (A.3) и (A.1). Таким образом, для любого $\varepsilon \leq \min\{\varkappa/c; 1\}$ и $t \in [t_k - \varepsilon, t_k]$, имеем

$$\begin{aligned} \Delta_i^y(t) &\leq \Delta_i^y(t_k) + |\Delta_i^y(t) - \Delta_i^y(t_k)| \leq \Delta_i^y(t_k) + c|t - t_k| \leq \Delta_i(t_k) + c\varepsilon \\ &\stackrel{(A.20), (A.22)}{\leq} m(\overline{\mathcal{Y}}) + c\varepsilon + \alpha_i(k) \stackrel{k \approx \infty}{\leq} m_* := m(\overline{\mathcal{Y}}) + 2\varkappa < \frac{w}{N} - \varkappa < \frac{w}{N}, \end{aligned}$$

что дает, что $\Delta_i(t) = d_i^+(t)$ благодаря (1.2), (A.1) и Следствию A.9. Более того,

$$\begin{aligned} \Delta_{i+1}^y(t) &\geq \Delta_{i+1}^y(t_k) - |\Delta_{i+1}^y(t) - \Delta_{i+1}^y(t_k)| \geq \Delta_{i+1}^y(t_k) - c|t - t_k| \geq \Delta_{i+1}^\infty(\overline{\mathcal{Y}}) + \alpha_{i+1}(k) - c\varepsilon \\ &\stackrel{k \approx \infty}{\geq} \Delta_{i+1}^\infty(\overline{\mathcal{Y}}) - 2\varkappa \geq m_* + \varkappa \end{aligned}$$

и поэтому $d_{i+1}^+(t) \geq m_* + \varkappa$ из-за (1.2), (A.1), Следствия A.9 и неравенства $m_* + \varkappa < w/N$. Всякий раз, когда $j \leq N - 2$, имеем $\Delta_j^y(t) \geq \Delta_j^y(t_k) - |\Delta_j^y(t) - \Delta_j^y(t_k)| \geq \Delta_j^y(t_k) - c\varepsilon$, тогда как $\Delta_j^\infty(\overline{\mathcal{Y}}) \geq m(\overline{\mathcal{Y}})$. Следовательно $\Delta_j^y(t) \geq m(\overline{\mathcal{Y}}) + \alpha_j(k) - c\varepsilon$ по (A.22). Продолжим, рассмотрев отдельно два варианта. Предположим сначала, что $i \geq 0$. Тогда для $t \in [t_k - \varepsilon, t_k]$,

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_i^y(t) &\stackrel{\Sigma_i=0, (A.12)}{=} \Xi[\Delta_{i+1}^y(t)] - 2\Xi[\Delta_i^y(t)] + \Xi[\Delta_{i-1}^y(t)] \\ &\stackrel{(1.10), k \approx \infty}{\geq} \Xi[m(\overline{\mathcal{Y}}) + 3\varkappa] - 2\Xi[m(\overline{\mathcal{Y}}) + c\varepsilon + \alpha_i(k)] + \Xi[\Delta_{i-1}^y(t)] \\ &\geq \Xi[m(\overline{\mathcal{Y}}) + 3\varkappa] - 2\Xi[m(\overline{\mathcal{Y}}) + c\varepsilon + \alpha_i(k)] + \Xi[m(\overline{\mathcal{Y}}) + \alpha_{i-1}(k) - c\varepsilon] \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{t \in [t_k - \varepsilon, t_k]} \dot{\Delta}_i^y(t) \\ &\geq \Xi[m(\overline{\mathcal{Y}}) + 3\varkappa] - 2\Xi[m(\overline{\mathcal{Y}}) + c\varepsilon] + \Xi[m(\overline{\mathcal{Y}}) - c\varepsilon] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \chi := \Xi[m(\overline{\mathcal{Y}}) + 3\varkappa] - \Xi[m(\overline{\mathcal{Y}})] \stackrel{(1.9), (1.10), (1.16)}{>} 0 \end{aligned}$$

Таким образом, правильно сократив ε , если необходимо, можем гарантировать, что $\dot{\Delta}_i^y(t) \geq \chi/2$ для всех $t \in [t_k - \varepsilon, t_k]$ и $k \approx \infty$. Тогда

$$\Delta_i^y(t_k - \varepsilon) = \Delta_i^y(t_k) - \int_{t_k - \varepsilon}^{t_k} \dot{\Delta}_i^y(t) dt \leq \Delta_i^y(t_k) - \chi\varepsilon/2. \quad (A.23)$$

Теперь выберем сходящуюся подпоследовательность из ограниченной последовательности $\{Y(t_k - \varepsilon)\}_{k=1}^\infty$. Его предел $\mathcal{Y}_\varepsilon$ является ω -предельным распределением, для которого величина (A.18) меньше одноименной величины, связанной с $\overline{\mathcal{Y}}$ благодаря (A.22) (где $t_k \mapsto t_k - \varepsilon$ и $\overline{\mathcal{Y}} \mapsto \mathcal{Y}_\varepsilon$) и (A.23), что нарушает определение $\overline{\mathcal{Y}}$ как минимизатора (A.18). Это противоречие завершает доказательство, если имеет место первый вариант.

Для завершения анализа случая (A.20) остаётся обработать ситуацию, когда $i = -1$. Тогда для $t \in [t_k - \varepsilon, t_k]$,

$$\dot{\Delta}_i^y(t) \stackrel{\Sigma_i=0, (A.12)}{=} 2\Xi[\Delta_0^y(t)] - 2\Xi[\Delta_{-1}^y(t)] \stackrel{(1.10), k \approx \infty}{\geq} 2\Xi[m(\overline{\mathcal{Y}}) + 3\varkappa] - 2\Xi[m(\overline{\mathcal{Y}}) + c\varepsilon + \alpha_{-1}(k)]$$

Следовательно

$$\begin{aligned} &\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{t \in [t_k - \varepsilon, t_k]} \dot{\Delta}_i^y(t) \\ &\geq 2\Xi[m(\overline{\mathcal{Y}}) + 3\varkappa] - 2\Xi[m(\overline{\mathcal{Y}}) + c\varepsilon] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \chi_* := 2\Xi[m(\overline{\mathcal{Y}}) + 3\varkappa] - 2\Xi[m(\overline{\mathcal{Y}})] \stackrel{(1.10), (2.7), (1.16)}{>} 0. \end{aligned}$$

Доказательство завершается так же, как в ситуации, когда $i \geq 0$.

Случай (A.21) рассматривается так же, как случай (A.20), с заменой интервалов $[t_k - \varepsilon, t_k]$ на $[t_k, t_k + \varepsilon]$ и выбором в качестве сходящейся подпоследовательности из последовательности $\{Y(t_k + \varepsilon)\}_{k=1}^\infty$. $\square$

Объединяя (A.17) с (A.19), приходим к следующему.

Следствие A.19. Для любого ω -предельного распределения $\mathcal{Y}$ справедливы следующие уравнения:

$$\Delta_i^\infty(\mathcal{Y}) = \frac{w}{N} \quad \forall i = -1, \dots, N-1. \quad (\text{A.24})$$

Лемма A.20. Для любого $i = 0, \dots, N-1$,

$$y_i(t) \rightarrow -w/2 + w/(2N) + iw/N \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty. \quad (\text{A.25})$$

Доказательство. Для любого ω -предельного распределения $\mathcal{Y} = [y_{-1}^\infty, \dots, y_N^\infty]$ формулы (A.16) и (A.24) подразумевают, что $y_i^\infty = -w/2 + w/(2N) + iw/N \quad \forall i = 0, \dots, N-1$. Пусть $\bar{y}$ будет ω -предельной точкой отображения $y_i(\cdot)$, т. е. $\bar{y} = \lim_{k \rightarrow \infty} y_i(t_k)$ для некоторой неограниченно возрастающей последовательности $\{t_k\}$. Выбираем сходящуюся подпоследовательность из ограниченной последовательности $\{Y(t_k)\}_{k=1}^\infty$. Её предел — это ω -предельное распределение, а её i -й элемент равен $\bar{y}$. Отсюда следует, что $\bar{y} = -w/2 + w/(2N) + iw/N$. Другими словами, все ω -предельные точки ограниченной функции $y_i(\cdot)$ одинаковы и равны $-w/2 + w/(2N) + iw/N$. Это влечет (A.25) [205, Гл. VII, Следствие 1.1] и завершает доказательство. $\square$

Доказательство теоремы 1.3.3: По следствию A.3 и A.5, утверждение **ii)** теоремы 1.3.2 истинно; утверждение **iii)** выполняется по лемме A.8. Осталось доказать утверждение **i)**. По лемме A.13 роботы не сталкиваются друг с другом и стенами коридора. Итак, по определению 1.1.1 и лемме A.20 достаточно показать, что при $t \rightarrow \infty$ величины $z_i(t) := x_i(t) - tv_{\text{des}}$ сходятся к пределу, общему для всех $i = 0, \dots, N-1$. Для этого используем [92, Теорему 1]. Прежде всего, придадим (1.12) вид, принятый в [92]:

$$\dot{z}_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} a_{ji}(t) [z_j(t) - z_i(t)], \quad \text{где} \quad a_{ji}(t) := \frac{w_{ji}(t)}{\sum_{k \in \mathcal{N}_i(t)} w_{ki}(t)} \frac{\Upsilon[z_j(t) - z_i(t)]}{z_j(t) - z_i(t)}.$$

Следуя [92], рассмотрим граф $\mathcal{G}_\infty$ с множеством узлов $\{0, \dots, N-1\}$, где i и j связаны ребром тогда и только тогда, когда $\int_0^\infty a_{ij}(t) dt = \infty$. По [92, Теореме 1] требуемый общий предел существует, если **1)** существует константа K такая, что $a_{ij}(t) \leq K a_{ji}(t) \quad \forall i, j, t$ и **2)** граф $\mathcal{G}_\infty$ связан. (Здесь **1)** подразумевает, что этот граф неориентированный.)

1) Заметим, что $a_{ji}(t) \geq 0$, $w_{ji}(t) = w_{ij}(t)$, и $a_{ji}(t) = 0$ тогда и только тогда, когда $a_{ij}(t) = 0$ по (1.9) и (1.3), тогда как $w_{ii}(t) = 1$, $w_{ki}(t) \in [0, 1]$, и $i \in \mathcal{N}_i(t)$ по (1.3) и (1.11). По следствию A.9, $|z_j(t) - z_i(t)| \leq \varsigma(0)$. Итак, всякий раз, когда $a_{ji}(t) > 0$, верно следующее:

$$\begin{aligned} a_{ji}(t) &\leq w_{ji}(t) \frac{\Upsilon[z_j(t) - z_i(t)]}{z_j(t) - z_i(t)} \stackrel{(2.7)}{\leq} \bar{\Upsilon}' w_{ji}(t) = \bar{\Upsilon}' w_{ij}(t) = \bar{\Upsilon}' N \frac{w_{ij}(t)}{N} \leq \bar{\Upsilon}' N \frac{w_{ij}(t)}{\sum_{k \in \mathcal{N}_j(t)} w_{kj}(t)} \\ &\leq \frac{\bar{\Upsilon}' N}{\eta} \frac{w_{ij}(t)}{\sum_{k \in \mathcal{N}_j(t)} w_{kj}(t)} \frac{\Upsilon[z_i(t) - z_j(t)]}{z_i(t) - z_j(t)} = \frac{\bar{\Upsilon}' N}{\eta} a_{ij}(t), \quad \text{где} \quad \eta := \inf_{z \in [-\varsigma(0), \varsigma(0)], z \neq 0} \frac{\Upsilon(z)}{z} \stackrel{(2.7)}{>} 0 \end{aligned}$$

и константа $\frac{\overline{\Upsilon}N}{\eta}$ не зависит от i, j, t . Это означает, что **1)** выполняется.

2) Для любого $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших t , сходимость (A.25) подразумевает, что $|y_i(t) - y_{i+1}(t)| < w/N + \varepsilon$, тогда как $|z_{i+1}(t) - z_i(t)| \leq \varsigma(0) < \delta$. Следовательно $\|\mathbf{r}_{i+1}(t) - \mathbf{r}_i(t)\| \leq R_\varepsilon := \sqrt{(w/N + \varepsilon)^2 + \varsigma(0)^2}$. Основываясь на (1.16), выбираем ε настолько малым, что $R_\varepsilon < R_{\text{sen}}$. Тогда $\lambda_\dagger := \min\{R_\varepsilon/R_{\text{sen}}; \varsigma(0)/\delta\} < 1$ благодаря предположению 1.3.1. По (1.3), $w_{i+1,i}(t) \geq q^2$, где $q := \min_{\lambda \in [0, \lambda_\dagger]} W(\lambda) > 0$ по (1.11), так как $\lambda_\dagger < 1$. Следовательно, узлы i и $i + 1$ связаны ребром графа $\mathcal{G}_\infty$ для любого i , и поэтому этот граф связан. $\square$

Доказательство теоремы 1.3.2: Эта теорема тривиально следует из теоремы 1.3.3. $\square$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Приложение к Главе 2

Б.1. Доказательство теоремы 2.5.2 и замечаний 2, 3, 4

Исследуем движение команды, управляемой предложенным законом управления, в предположениях теоремы 2.5.2. Далее, x -расстояние — это расстояние между абсциссами двух точек; y -расстояние определяется аналогично.

Лемма Б.1. Утверждение *i)* теоремы 2.5.2 верно.

Доказательство. По (2.4), $|\alpha_i(t)| \leq \alpha_* \Rightarrow |\operatorname{tg} \alpha_i(t)| \leq \operatorname{tg} \alpha_*$. По (2.8), (2.9), $|v_i^x(t)| \leq v_{\rightarrow} + \bar{F}$. Согласно (2.6) и (2.10), $|v_i^y(t)| \leq \bar{G} + P \operatorname{tg} \alpha_*$. Доказательство завершается по (2.16). $\square$

Следующая лемма использует следующую нотацию: $\mathfrak{v}_x := v_{\text{des}} - \bar{F} \stackrel{(2.15)}{>} 0$.

Лемма Б.2. Утверждения *iii)* и *iv)* теоремы 2.5.2 верны. Более того, $\dot{x}_i(t) \geq \mathfrak{v}_x$ п.в. t .

Доказательство. **iii)** Пусть $z_i(t) := x_i(t) - v_{\text{des}} \cdot t$. По теореме Данскина [206], функция $M(t) := \max_i z_i(t)$ абсолютно непрерывна, и $\dot{M}(t) = \dot{z}_{i_t^0}(t)$ п.в. t , где i_t^0 — максимизатор для $\max_i z_i(t)$. По (2.9) и определению решения Филиппова, $\dot{z}_{i_t^0}(t)$ лежит в выпуклой оболочке значений, которые являются пределами

$$\frac{1}{|\mathcal{N}_{i_t^0}(t)|} \sum_{j \in \mathcal{N}_{i_t^0}(t)} F[z_j(t) - z_{i_t^0}(t)] \quad (\text{Б.1})$$

по мере того как возмущённое состояние системы $\{r_i(t)\}_{i=1}^N$ стремится к истинному состоянию, тем или иным путём. Этот путь не влияет на предельные значения добавляемых членов, которые точно такие же, как показано в (Б.1). Они неположительные по (2.7). Следовательно, $\dot{M}(t) = \dot{z}_{i_t^0}(t) \leq 0$ п.в. t и $M(t)$ является невозрастающей функцией. Аналогично, $m(t) := \min_i z_i(t)$ является неубывающей функцией (для минимизатора вклад каждого слагаемого в (Б.1) неотрицателен по (2.7)). Остаётся отметить, что $\varsigma(t) = \max_{i,j} |z_i(t) - z_j(t)| = M(t) - m(t)$, и поэтому $\varsigma(\cdot)$ не возрастает.

iv) По (2.8), второй добавленный член в (2.9) не превосходит по абсолютной величине $\bar{F}$. Остаётся применить (2.15). $\square$

Следствие Б.3. $|x_i(t) - x_j(t)| < \gamma \forall t \geq 0, i, j$, где γ взята из теоремы 2.5.2.

Лемма Б.4. Если UGV i находится на козырке V в момент времени τ , то для $t \approx \tau, t > \tau$ он окажется вне V и фактически на той стороне V , которая была случайным образом загружена в его “разум” в момент $t = \tau$.

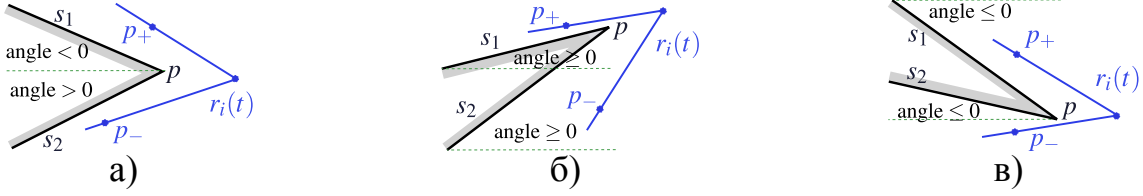


Рисунок Б.1 — Правые мысы и возможные варианты для двух непустых оснований

Доказательство. Пусть UGV i “думает“, что он находится ниже V в момент времени $t = \tau$; противоположный случай обрабатывается аналогично. Тогда $d_{i,\delta}^+(\tau+) = 0$ и $\alpha_i(t) := -\alpha_\star \forall t < \tau, t \approx \tau$ по (2.3) и (2.4). Остаётся отметить, что по (2.6) и (2.10),

$$\lim_{t \rightarrow \tau-} v_i^y(t) = \lim_{t \rightarrow \tau-} \left[G[d_{i,\delta}^+(t)] - \underbrace{G[d_{i,\delta}^-(t)]}_{\geq 0} + P \operatorname{tg} \alpha_i(t) \right] \leq G(0) - P \operatorname{tg} \alpha_\star \stackrel{(2.6)}{=} -P \operatorname{tg} \alpha_\star < 0.$$

Лемма Б.5. Пусть $[0, \tau]$ — интервал времени, в течение которого $r_i(t) \notin O_k \forall k$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- i) Для $t \in [0, \tau]$ UGV i не находится в пещерах какого-либо препятствия O_k ;
- ii) Если существует точка O_k выше (ниже) $r_i(t)$, ближайшая $p_i^\pm(t)$ из таких точек лежит на нижнем (верхнем) ограждении O_k .

Доказательство. i) Предположим, что i) неверно. Поскольку UGV i изначально находится вне пещер согласно предположениям теоремы 2.5.2, существует $\vartheta \in (0, \tau]$ и препятствие O_k , такое что $r_i(\vartheta)$ находится в пещере O_k , в то время как $r_i(t)$ не находится в его пещерах для $t \in [0, \vartheta)$. Применяя определение пещеры, видим, что луч $\mathcal{R}_+[r_i(t)]$ не пересекает O_k для $t \in [0, \vartheta), t \approx \vartheta$, или то же самое для луча $\mathcal{R}_-[r_i(t)]$. Сосредоточимся на первой ситуации, вторая обрабатывается аналогично. Вертикально продолжим $\mathcal{R}_+[r_i(t)]$ вниз от $r_i(t)$ до пересечения с O_k в некоторой точке $h(t)$ и таким образом получим луч $\mathcal{R}'_+(t)$, свободный от O_k . Поскольку $r_i(\vartheta)$ находится в пещере, оба луча $\mathcal{R}_\pm[r_i(\vartheta)]$ пересекают O_k . Следовательно, луч $\mathcal{R}'_+[h(\vartheta-)]$ не свободен от O_k , тогда как произвольно близко к нему находится луч $\mathcal{R}'_+(t)$, свободный от O_k и также лежащий слева от $\mathcal{R}_+[r_i(\vartheta)]$ по Лемме Б.2 (в части, касающейся iv) теоремы 2.5.2). Согласно Определению 2.2.2, это означает, что луч $\mathcal{R}'_+[h(\vartheta-)]$ является критическим для O_k в будущем, что нарушает предположение 2.2.3. Это противоречие завершает доказательство i).

ii) Это очевидно из i), вместе с Определением 2.2.4. □

Правый «мыс» препятствия O_k — это пара его сторон s_1, s_2 , которые имеют общую точку p , так что они лежат слева от p (см. рис. Б.1).

Лемма Б.6. i) На базы $B_i^\pm(t)$ UGV i влияет не более одного препятствия. ii) Не более одной базы не пуста.

Доказательство. i) Препятствие влияет на построение базы только если вертикально ниже/выше его точки p есть ребро графа $G_i(t)$ на расстоянии $\leq \gamma_y$. По определению $G_i(t)$, y -расстояние от $r_i(t)$ до p не превышает $\min\{N\gamma_y, R_{\text{sen}}\}$; x -расстояние не превышает γ по следствию Б.3. Учитывая, что может быть затронут воображаемый козырёк препятствия, x -расстояние до

настоящего препятствия не превышает $\varkappa + \gamma$. В целом, евклидово расстояние между p и $r_i(t)$ не превышает g_* , где g_* — левая часть равенства (2.22). Если на базы UGV i влияют разные препятствия, то расстояние между ними не превышает $2g_*$, что противоречит (2.22). Это завершает доказательство пункта i).

ii) Предположим, что $B_i^+(t) \neq \emptyset$ и $B_i^-(t) \neq \emptyset$, и выберем $p_{\pm} \in B_i^{\pm}(t)$. Вертикально ниже/выше $p^{\pm}$ находится точка $O_{k^{\pm}}$, при этом $k^+ = k^- =: k$ по пункту i). Согласно следствию Б.3 и (2.19), **1)** x -область $G_i(t)$ полностью покрывает x -область любой стороны многоугольника O_k , и **2)** если $r_i(t)$ лежит слева от козырька O_k , то любой узел $\Gamma_i(t)$ справа от $r_i(t)$ находится в x -области козырька. Согласно пункту i) в Лемме Б.5 и определению $G_i(t)$, существуют две стороны s_1 и s_2 препятствия O_k , которые формируют правый мыс, и p_+ находится вертикально выше s_1 , а p_- — ниже s_2 ; также, $[p_{\pm}, r_i(t)] \cap O_k = \emptyset$; см. рис. Б.1. Исходя из рис. Б.1, легко увидеть, что в любом случае нарушается либо условие В.3), либо В.2) в определении базы, либо для p_+ , либо для p_- . Это противоречие завершает доказательство. $\square$

Левый конец козырька называется его *краем*. Препятствие, лишенное краёв козырька, называется *тупым*.

Лемма Б.7. *UGV не сталкиваются с тупыми препятствиями.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}$ — множество времен $t > 0$, когда UGV и тупые препятствия не имеют общих точек. Согласно Лемме Б.4, множество $\mathcal{T}$ не пусто и открыто, следовательно, его наименьшая связанная компонента имеет вид $(0, \tau)$, где $\tau > 0$. Нам нужно доказать, что $\tau = \infty$.

Предположим наоборот, что $\tau < \infty$. Далее рассматриваем $t < \tau, t \approx \tau$. С помощью Леммы Б.4 можно заключить, что для таких t UGV находятся вне препятствий с козырьком, и существует i и k , такие что $r_i(\tau)$ находится в тупом препятствии O_k , и $r_i(t)$ либо **1)** всегда находится ниже O_k , либо **2)** всегда выше O_k . Рассмотрим случай 1), случай 2) аналогичен. Тогда существует сторона S препятствия O_k , такая что $r_i(\tau) \in S$, а $r_i(t)$ находится ниже S ; см. рис. Б.2. Обозначим точку S , которая вертикально выше $r_i(t)$, через $p(t)$. Положим $\chi(t) := x[p(t)]$, $y(t) := y[p(t)]$, $z(t) := y(t) - y_i(t)$ и рассмотрим случаи, приведенные на рис. Б.2.

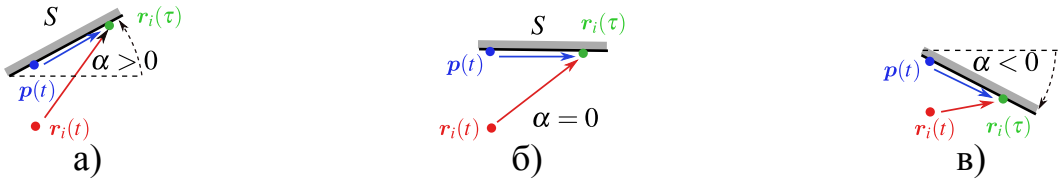


Рисунок Б.2 — Три способа столкновения с препятствием

Случай (а,б) на рис. Б.2. Тогда $x_i(t) = \chi(t)$, $y(t) = \chi(t) \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{const}$, $d_{i,\delta}^+(t) \leq z(t)$, и согласно (2.4) и Лемме Б.6, $\alpha_i(t) \leq 0 \forall t < \tau, t \approx \tau$. Следовательно,

$$\exists \{t_k\}_{k=1}^{\infty} : z(t_k) > 0, t_k < \tau, t_k \rightarrow \tau, z(\tau) = 0; \quad (\text{Б.2})$$

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= v_i^x(t) \operatorname{tg} \alpha - v_i^y(t) \stackrel{(2.8), (2.9)}{\geq} (v_{\text{des}} + \bar{F}) \operatorname{tg} \alpha - v_i^y(t) \\ &\stackrel{(2.10)}{=} (v_{\text{des}} + \bar{F}) \operatorname{tg} \alpha - \underbrace{G[d_{i,\delta}^+(t)]}_{\geq 0} + \underbrace{G[d_{i,\delta}^-(t)]}_{\leq 0} - P \operatorname{tg} \alpha_i(t) \\ &\geq (v_{\text{des}} + \bar{F}) \operatorname{tg} \alpha - G[d_{i,\delta}^+(t)] \geq -G[z(t)]. \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

Для $t < \tau, t \approx \tau$ значение $z(t) > 0$ лежит выше решения $z_0(t) \equiv 0$ для ОДУ $\dot{z}_0 = -G[z_0(t)]$. Тогда по [205, гл. III, теор. 4.1], $z(\tau)$ также будет больше нуля, что противоречит (Б.2). Это завершает доказательство для случаев (а) и (б).

Случай (в) на рис. Б.2. Робот i уклоняющийся, и $\alpha_i(t) = -\alpha_*$ по (2.4) и Лемме Б.6. Согласно (2.12) и Лемме Б.5,

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= v_i^x(t) \operatorname{tg} \alpha - v_i^y(t) \stackrel{(2.8), (2.9)}{\geq} -(v_{\text{des}} + \bar{F}) \operatorname{tg} \hat{\alpha} - v_i^y(t) \\ &\stackrel{(2.10)}{=} -(v_{\text{des}} + \bar{F}) \operatorname{tg} \hat{\alpha} - \underbrace{G[d_{i,\delta}^+(t)]}_{\geq 0} + \underbrace{G[d_{i,\delta}^-(t)]}_{\geq 0} \\ &\quad - P \operatorname{tg} \alpha_i(t) \geq -(v_{\text{des}} + \bar{F}) \operatorname{tg} \hat{\alpha} - G[d_{i,\delta}^+(t)] + P \operatorname{tg} \alpha_* \stackrel{(2.17)}{\geq} -G[z(t)] \quad \forall t < \tau, t \approx \tau. \end{aligned}$$

Доказательство завершается, как и для случаев (а) и (б). □

Следствие Б.8. *UGV не сталкиваются с реальными препятствиями и стенками коридора.*

По предположениям Теоремы 2.5.2, UGV стартуют за пределами пещер. Тогда i) в Лемме Б.5 даётся следующее утверждение.

Следствие Б.9. *UGV не посещают пещеры.*

Применив Лемму Б.4 и Лемму Б.2, также приходим к следующим двум выводам.

Следствие Б.10. *Утверждение 3 истинно.*

Следствие Б.11. *Времена, когда UGV i находятся в x -области любого препятствия O_k , образуют конечный интервал $\mathcal{T}$ (возможно, пустой). Для $t \in \mathcal{T}$, UGV i либо всегда находится выше O_k , либо всегда ниже O_k .*

Для любых UGV $i \neq j$ определим $S_{i,j}(t) := [\mathbf{r}_i(t), \mathbf{r}_j(t)]$. Время τ называется *касанием* для пары (i, j) и препятствия O_k , если $S_{i,j}(\tau) \cap O_k \neq \emptyset$, и существует время $t < \tau$, когда $S_{i,j}(t) \cap O_k = \emptyset$, которое может быть произвольно близким к τ .

Лемма Б.12. *Пусть τ — это время касания для пары (i, j) и препятствия O_k . Тогда выполняются следующие утверждения:*

i) *Точка $\mathbf{r}_i(\tau)$ или $\mathbf{r}_j(\tau)$ лежит в x -области O_k , или обе лежат там, и $x_i(\tau) = x_j(\tau)$;*

ii) Любая точка $p \in S_{i,j}(\tau) \cap O_k$ является левым концом козырька или правым мысом (см. рис. Б.3(д–ж)).

На подрисунках Б.3е и Б.3ж далее показаны частные конфигурации, соответствующие случаям (е) и (ж).

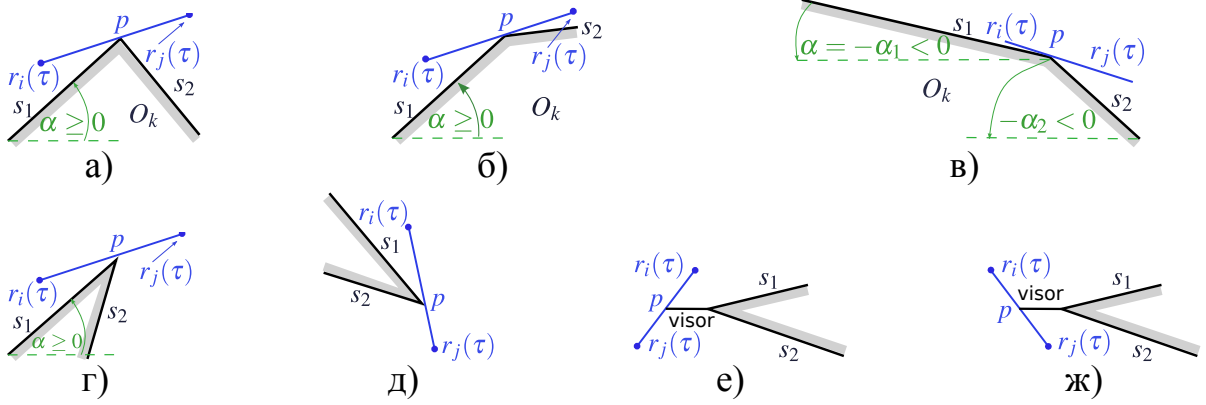


Рисунок Б.3 — Допустимые варианты в момент касания τ

Доказательство. Внутренность O_k не пересекает $S_{i,j}(\tau)$, и $r_i(\tau), r_j(\tau)$ не являются точками тупого препятствия O_k согласно Лемме Б.7. Следовательно, следствие Б.3 и (2.19) подразумевают, что $S_{i,j}(\tau) \cap O_k$ содержит единственную точку p , которая является вершиной O_k . Пусть s_1 и s_2 — стороны O_k , смежные с p . Учитывая (2.19) и Лемму Б.2, видим, что допустимые случаи при $t = \tau$ — это либо те, что изображены на рис. Б.3, либо их зеркальные отражения относительно горизонтальной линии. Сосредоточимся на первой группе случаев; вторая группа обрабатывается аналогично.

Используем $\bar{\alpha}$ из (2.2) и обозначение $\varphi(S)$, введенное в начале раздела 2.5, и сосредотачиваемся на (а–г). Согласно Леммам Б.5, Б.7 и рис. Б.3, $|\beta| < \bar{\alpha}$ для $\beta := \varphi[S(\tau)]$. Таким образом, следствие Б.3 $\Rightarrow |y_i(\tau) - y_j(\tau)| \leq |x_i(\tau) - x_j(\tau)| \operatorname{tg} |\beta| < \gamma \operatorname{tg} \bar{\alpha} \leq \gamma_y$ по (2.19) и последнему неравенству из (2.15). Следовательно, для $t < \tau, t \approx \tau$ узлы i и j связаны в $\Gamma_i(t)$ и $\Gamma_j(t)$, и $S_{i,j}(t) \subset G_i(t) \cap G_j(t)$. Также Лемма Б.6 и (2.4) предполагают, что $\alpha_i(t) = \alpha_j(t) = \alpha_*$ в случаях (а), (б), (г), тогда как $\alpha_i(t) = \alpha_j(t) = 0$ в случае (в).

На рис. Б.3 s_1 лежит на прямой, описываемой уравнением $y = x \operatorname{tg} \alpha + c$ для некоторого c . Также, $p = \theta_i r_i(\tau) + \theta_j r_j(\tau)$, где $\theta_i > 0, \theta_j > 0, \theta_i + \theta_j = 1$. Задаём $p(t) = \theta_i r_i(t) + \theta_j r_j(t), x(t) := x[p(t)], y(t) := y[p(t)], z(t) := y(t) - x(t) \operatorname{tg} \alpha + c$. Тогда выполняется (Б.2) и

$$\dot{x} = \theta_i v_i^x + \theta_j v_j^x \begin{cases} \geq v_x \text{ по Лемме Б.2,} \\ \leq v_{\text{des}} + \bar{F} \text{ по (2.8), (2.9);} \end{cases}$$

В случаях (а), (б) и (г) имеем

$$\begin{aligned}
 \dot{z} &= \dot{y} - \dot{x} \operatorname{tg} \alpha \geq \dot{y} - (v_{\text{des}} + \bar{F}) \operatorname{tg} \hat{\alpha} \\
 &\stackrel{(2.10)}{=} -(v_{\text{des}} + \bar{F}) \operatorname{tg} \hat{\alpha} + \sum_{q=i,j} \theta_q \left\{ \underbrace{G[d_{q,\delta}^+(t)] - G[d_{q,\delta}^-(t)]}_{\geq 0} + P \operatorname{tg} \alpha_* \right\} \\
 &\stackrel{(2.6)}{\geq} -(v_{\text{des}} + \bar{F}) \operatorname{tg} \hat{\alpha} + \sum_{q=i,j} \theta_q \{-\bar{G} + P \operatorname{tg} \alpha_*\}, \xrightarrow{t \rightarrow \tau-} -(v_{\text{des}} + \bar{F}) \operatorname{tg} \hat{\alpha} - \bar{G} + P \operatorname{tg} \alpha_* \stackrel{(2.17)}{>} 0,
 \end{aligned}$$

что нарушает (Б.2). Это показывает, что (а), (б), (г) не происходят.

В случае (с) на рис. Б.3 s_1 и s_2 образуют пару, направленную вперед, и поэтому $\bar{\alpha} \geq \alpha_i \geq \beta_{\min}$ по (2.13) и определению $\bar{\alpha}$ из (2.2). Следовательно, $|\varphi[S(\tau)]| \leq \bar{\alpha}$, и тогда (2.3), (2.19) и следствие Б.3 подразумевают, что $d_{q,\delta}^-(\tau-) \leq \gamma \operatorname{tg} \bar{\alpha}$ для $q = i, j$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \dot{z} &\geq \dot{y} + \dot{x} \operatorname{tg} \alpha_1 \stackrel{\text{Лемма Б.2}}{\geq} \dot{y} + v_x \operatorname{tg} \beta_{\min} \stackrel{(2.10)}{=} v_x \operatorname{tg} \beta_{\min} + \sum_{q=i,j} \theta_q \left\{ \underbrace{G[d_{q,\delta}^+(t)] - G[d_{q,\delta}^-(t)]}_{\geq 0} \right\} \\
 &\stackrel{(2.6)}{\geq} v_x \operatorname{tg} \beta_{\min} - \sum_{q=i,j} \theta_q G[d_{q,\delta}^-(t)] \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \tau-} \dot{z}(t) \geq v_x \operatorname{tg} \beta_{\min} - G[\gamma \operatorname{tg} \bar{\alpha}] \stackrel{(2.20)}{>} 0.
 \end{aligned}$$

Как и в случаях (а), (б), (г), видим, что (в) не выполняется.

Остается отметить, что во всех других случаях (д–ж) на рис. Б.3 утверждения i)–ii) очевидно истинны. $\square$

Следствие Б.13. Если препятствие O_k разделяет UGV i и j , то они не могут быть оба выше O_k и не могут быть оба ниже O_k .

Доказательство. Предположим противное, что существует время t_* , такое что O_k разделяет $r_i(t_*)$ и $r_j(t_*)$, в то время как UGV находятся либо оба выше O_k , либо оба ниже O_k . Множество $\mathcal{T}$ времен $t \geq 0$, для которых O_k не разделяет $r_i(t)$ и $r_j(t)$, содержит 0 (по предположениям Теоремы 2.5.2), а время $\tau := \sup\{t \in \mathcal{T} : t < t_*\}$ является временем касания. Согласно Леммам Б.2 и Б.12, случаи (д–ж) на рис. Б.3 (или их горизонтальные зеркальные отражения) выполняются при $t = \tau$ (возможно, с обменом индексов $i \rightleftharpoons j$). Случай (д) на рис. Б.3 не может происходить: иначе опережающая UGV не будет находиться в x -области козырька O_k при $t = t_*$ по Лемме Б.2.

Предположим, что $\tau = t_*$. Поскольку $r_i(t_*)$ и $r_j(t_*)$ находятся в x -области козырька O_k , отрезок $S_{i,j}(t) := [r_i(t), r_j(t)]$ при $t = t_*$ вертикален на рис. Б.3(е,ж). Таким образом, одна из UGV i, j находится выше O_k , а другая ниже O_k при $t = t_*$, что нарушает определение t_* . Следовательно, $\tau < t_*$. По мере того как t изменяется от τ к t_* , опережающая UGV на рис. Б.3(е,ж) сохраняет своё положение относительно O_k (выше/ниже) благодаря следствию Б.11. Согласно следствию Б.3 и неравенству $\gamma < \varkappa$ из (2.19), не позднее чем эта UGV покидает x -область козырька, другая UGV входит в эту область. Пусть θ — время, когда это происходит. Тогда $\tau < \theta \leq t_*$ и при $t = \theta$ “другая” UGV оказывается на другой стороне козырька, так как отрезок $S_{i,j}(t) \cap O_k \neq \emptyset \forall t \in [\tau, \theta]$. Согласно следствию Б.11, она остаётся на другой стороне O_k до t_* , что нарушает определение t_* . Это противоречие завершает доказательство. $\square$

По предположению Теоремы 2.5.2, UGV могут быть пронумерованы так, что при $t = 0$ выполняется следующее:

$$y_1(t) < \dots < y_N(t). \quad (\text{Б.4})$$

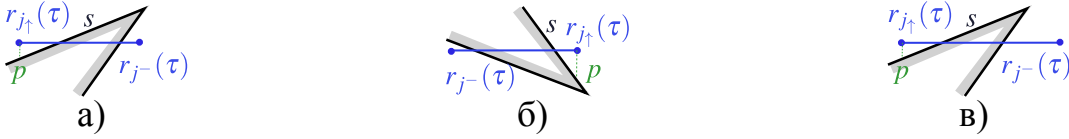


Рисунок Б.4 — Возможные варианты в момент времени τ , когда ординаты двух UGV становятся равными

Лемма Б.14. Неравенства (Б.4) выполняются для любого $t > 0$.

Доказательство. Предположим, что вывод леммы неверен. Пусть $(0, \tau)$ — это самая левая связанная компонента множества $\mathcal{T} := \{t > 0 : (Б.4) \text{ выполняется}\}$. Тогда $\tau \in (0, \infty)$ и существуют такие $1 \leq j^- < j^+ \leq N$ и $y_{\mathfrak{H}} \in \mathbb{R}$, что

$$\begin{aligned} y_j(\tau) &= y_{\mathfrak{H}} \quad \forall j \in J := \{j = j^-, \dots, j^+\}, \\ y_{j-1}(\tau) &< y_{j-}(\tau) \quad \text{если } j^- > 1, \\ y_{j+}(\tau) &< y_{j+1}(\tau) \quad \text{если } j^+ < N. \end{aligned} \quad (Б.5)$$

Положим $j_{\uparrow} := j^- + 1$, $z(t) := y_{j_{\uparrow}}(t) - y_{j-}(t)$. По (2.19) и следствию Б.3, $|x_{j-}(t) - x_{j_{\uparrow}}(t)| < \gamma \leq \gamma_x$, $|y_{j-}(t) - y_{j_{\uparrow}}(t)| < \gamma_y$ для $t < \tau, t \approx \tau$. Также, (Б.2) остаётся верным. Теперь рассмотрим несколько случаев отдельно.

1) Отрезок $S(t) := [r_{j-}(t), r_{j_{\uparrow}}(t)]$ пересекает тупое препятствие O_k при $t = \tau$. По Лемме Б.6, это препятствие уникально. Среди точек $r_{j-}(\tau), r_{j_{\uparrow}}(\tau)$ существует хотя бы одна p_{sc} (строго) внутри x -области O_k из-за (2.19). Сосредоточимся на случае, когда p_{sc} находится выше O_k ; противоположный случай рассматривается аналогично. По следствию Б.13, другая точка p_{sc} не находится выше O_k . Поскольку $S(\tau)$ горизонтален и не превышает длины γ по Лемме Б.2, в то время как γ меньше длины козырька по (2.19), $x(p_{sc})$ не может находиться слева от x -области O_k . Таким образом, либо p_{sc} находится ниже O_k , либо справа от его x -области. Рассмотрим эти случаи отдельно.

1.а) p_{sc} находится ниже O_k . По предположениям Теоремы 2.5.2, $S(0) \cap O_k = \emptyset$. Из-за Леммы Б.12 и случаев (д–ж) на рис. Б.3, в момент времени, когда $S(t)$ впервые касается O_k , либо UGV $j_{\uparrow}$ находится выше O_k , либо UGV j^- находится ниже O_k . С учетом следствия Б.11 следует, что $p_{sc} = r_{j-}(\tau)$ находится ниже O_k , а $p_{sc} = r_{j_{\uparrow}}(\tau)$ находится выше O_k . Пусть s будет стороной O_k , содержащей p , так что отрезок $(p, r_{j_{\uparrow}}(\tau))$ вертикален и не пересекает O_k . В зависимости от того, положителен ли полярный угол $\varphi(s)$ стороны s или отрицателен, происходят ситуации, изображенные на рис. Б.4а и Б.4б, соответственно (см. также общий рисунок Б.4).

Случай из рис. Б.4а. Как и в доказательстве Леммы Б.12, видим, что для $t < \tau, t \approx \tau$ UGV $j_{\uparrow}$ уклоняется, и $\alpha_{j_{\uparrow}}(t) = \alpha_*$, $\alpha_{j-}(t) = 0$. Также, (2.12) и следствие Б.3 показывают, что $\lim_{t \rightarrow \tau-} d_{j_{\uparrow}, \delta}^-(t) \leq \gamma \operatorname{tg} \hat{\alpha}$. Таким образом, для $t < \tau, t \approx \tau$,

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= v_{j_{\uparrow}}^y(t) - v_{j-}^y(t) \stackrel{(2.10)}{=} G[d_{j_{\uparrow}, \delta}^+(t)] - G[d_{j_{\uparrow}, \delta}^-(t)] - G[d_{j-, \delta}^+(t)] + G[d_{j-, \delta}^-(t)] + P \operatorname{tg} \alpha_{j_{\uparrow}}(t) \\ &\stackrel{(2.6)}{\geq} -G[d_{j_{\uparrow}, \delta}^-(t)] - \overline{G} + P \operatorname{tg} \alpha_* \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \tau-} \dot{z}(t) \geq P \operatorname{tg} \alpha_* - \overline{G} - G[\gamma \operatorname{tg} \hat{\alpha}] \stackrel{(2.21)}{>} 0, \end{aligned}$$

что противоречит (Б.2). Таким образом, случай из рис. Б.4а не имеет места.

Случай из рис. Б.4б. Как и в предыдущем случае, видим, что для $t < \tau, t \approx \tau$ UGV j^- уклоняется, и $\alpha_{j^-}(t) = -\alpha_*$, в то время как $\alpha_{j^+}(t) = 0$. Также, $\lim_{t \rightarrow \tau^-} d_{j^-, \delta}^+(t) \leq \gamma \operatorname{tg} \hat{\alpha}$. Доказательство завершается так же, как и в предыдущем случае, и приводит к выводу, что случай из рис. Б.4б невозможен. Следовательно, случай **1.a)** не происходит.

1.b) p_{sc} находится справа от x -области O_k . Пусть $\mathcal{T}$ — это множество $t \in [0, \tau)$, для которых O_k не разделяет UGV i и j . Тогда $0 \in \mathcal{T}$ по предположениям Теоремы 2.5.2, $\mathcal{T}$ открыто в $[0, \tau)$ и $\mathcal{T} \neq [0, \tau)$. Таким образом, самая левая связанная компонента множества $\mathcal{T}$ имеет вид $[0, \theta)$, где $\theta \in (0, \tau)$ — время касания для пары (i, j) и O_k . Из Лемм Б.2, Б.12 и случаев (д–ж) на рис. Б.3 следует, что при $t \approx \theta, t < \theta$ UGV j^+ с большей ординатой не может находиться ниже O_k . По следствию Б.11 и Лемме Б.13, он не может нырнуть ниже O_k , проходя через x -область O_k . Таким образом, видим, что $p_{\text{sc}} = r_{j^+}(\tau)$ и $p_{\text{sc}} = r_{j^-}(\tau)$; см. рис. Б.4в. Применяя рассуждения, как для рис. Б.4а, приходим к выводу, что случай **1.b)** и, следовательно, общий случай **1)** невозможны. Теперь переходим к рассмотрению оставшегося случая.

2) $S(\tau)$ не пересекает тупые препятствия. Поскольку этот отрезок горизонтален, он также не пересекает препятствия с козырьком. UGV j^- и j^+ находятся в прямой видимости друг друга, и $S(t) \subset G_{j^-}(t), G_{j^+}(t), d_{j^+, \delta}^-(t) \leq z(t), d_{j^+, \delta}^+(t) \leq z(t)$, и (Б.2) выполняется. Снова рассматриваем возможные случаи отдельно.

2.a) $\alpha_{j^-}(t) \leq \alpha_{j^+}(t) \forall t < \tau, t \approx \tau$. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) = v_{j^+}^y(t) - v_{j^-}^y(t) &\stackrel{(2.10)}{=} \underbrace{G[d_{j^+, \delta}^+(t)] - G[d_{j^+, \delta}^-(t)]}_{\geq 0} - G[d_{j^-, \delta}^+(t)] + \underbrace{G[d_{j^-, \delta}^-(t)]}_{\geq 0} \\ &+ P \operatorname{tg} \alpha_{j^+}(t) - P \operatorname{tg} \alpha_{j^-}(t) \stackrel{(2.6)}{\geq} -2G[z(t)]. \end{aligned}$$

Тогда аргументы, приведенные сразу после (Б.3), приводят к противоречию с (Б.2) и показывают, что 2.a) невозможен.

2.b) Следовательно, выполняется один из следующих вариантов:

b.1) $\tau \in \overline{\mathcal{T}_+}$, где $\mathcal{T}_+ := \{t < \tau : \alpha_{j^-}(t) = \alpha_*, \alpha_{j^+}(t) \leq 0\}$;

b.2) $\tau \in \overline{\mathcal{T}_-}$ для $\mathcal{T}_- := \{t < \tau : \alpha_{j^-}(t) \geq 0, \alpha_{j^+}(t) = -\alpha_*\}$.

d obstacle does not exceed the l.h.s. of (2.22). Then (2.22) implies that the both angles are triggered by a common obstacle O_k .

b.1) По (2.4) и Лемме Б.6, уникальное препятствие влияет на построение любого ненулевого угла среди $\alpha_{j^-}(t), \alpha_{j^+}(t)$. Путем сужения множества $\mathcal{T}_+$ приходим к ситуации, в которой для всех $t \in \mathcal{T}_+$ угол $\alpha_{j^+}(t)$ принимает общее значение $\alpha_{j^+} \leq 0$, общее препятствие O_k влияет на $\alpha_{j^-}(t)$, и если $\alpha_{j^+} < 0$, то общее препятствие оказывает такое же влияние на $\alpha_{j^+}(t)$. Если $\alpha_{j^+} < 0$, аргументы из доказательства i) в Лемме Б.6 показывают, что расстояние от любого UGV j^-, j^+ до точки соответствующего препятствия не превышает левой части (2.22). Тогда (2.22) подразумевает, что оба угла вызываются общим препятствием O_k .

Пусть $t \in \mathcal{T}_+$. UGV j^- является уклонистом с основной базой $B_{j^-}^+(t)$. По (2.4) при $i := j^-$ существует j_* в связанной компоненте $C_{j^-}(t) \ni j^-$ множества $\Gamma_{j^-}(t)$, такая что $y_{j_*}(t) \leq y_{j^-}(t)$, сторона s препятствия O_k может быть найдена вертикально ниже точки $p \in \mathcal{S} := [r_{j^-}(t), r_{j_*}(t)]$ на расстоянии $\leq \gamma_y$, и плоско-параллельный бесконечно малый сдвиг $\mathcal{S}$ и p в направлении x не увеличивает вертикальное расстояние от $\mathcal{S}$ до O_k и от p до s . Таким образом, полярный угол $\varphi(s)$

стороны s положителен. Если все узлы из $C_{j^-}(t)$ находятся в прямой видимости от $j_\uparrow$, то $G_{j^-}(t) \subset G_{j_\uparrow}(t)$. Это и Лемма Б.6 подразумевают, что $j_\uparrow$ также является уклонистом с основной базой $B_{j_\uparrow}^+(t)$, что противоречит (2.4) и **б.1**). Следовательно, существует узел $j_\downarrow \in C_{j^-}(t)$, невидимый для UGV $j_\uparrow$. Тогда необходимо, чтобы $y_{j_\downarrow}(t) < y_{j^-}(t)$, и таким образом, $j_\downarrow < j^- < j_\uparrow$.

По следствию Б.3, $x_{j^-}(t), x_{j_\uparrow}(t), x(\mathbf{p}), x_{j_\downarrow}(t)$ лежат на интервале длины менее γ . Таким образом, (2.19) подразумевает, что $x_{j_\downarrow}(t)$ не может находиться слева от или в x -области козырька O_k . Учитывая первую неравенство из (2.19), делаем вывод, что $\mathbf{r}_{j_\downarrow}(t)$ находится выше O_k .

По предположениям Теоремы 2.5.2, O_k не разделяет UGV $j_\uparrow$ и $j_\downarrow$ изначально. Время, когда O_k начинает их разделять, является временем касания для $j_\downarrow, j_\uparrow$ и O_k и не превышает t . Пусть θ обозначает максимальное время касания, которое не превышает t . По Лемме Б.12, ситуация на рис. Б.3(g,f) имеет место для $\tau := \theta$. На рис. Б.3(g,f) $i = j_\uparrow$ и $j = j_\downarrow$ до тех пор, пока $j_\downarrow < j_\uparrow \Rightarrow y_{j_\downarrow}(\theta) < y_{j_\uparrow}(\theta)$. По мере того как время идет от θ до t , отрезок, соединяющий UGV $j_\uparrow$ и $j_\downarrow$, постоянно пересекает O_k . Следовательно, UGV $j_\downarrow$ оказывается ниже O_k в первый момент, когда он оказывается в x -области O_k . По следствию Б.11, UGV $j_\downarrow$ остаётся ниже O_k до времени t , что противоречит предыдущему утверждению. В результате видим, что случай **б.1**) не имеет места.

б.2) Подобным образом, видим, что этот случай также не имеет места.

Таким образом, предположение о нарушении леммы приводит к противоречию в любом случае. Доказательство завершено. $\square$

Теперь введем $x_\uparrow$, такое что $\mathfrak{C}_+ := \{\mathbf{r} \in \mathfrak{C} : x \geq x_\uparrow\} \not\supset O_k \forall k$. Из предыдущего следует следующее.

Следствие Б.15. *Рой безопасно проходит через полосу препятствий, входит в $\mathfrak{C}_+$, а затем продолжает движение внутри $\mathfrak{C}_+$.*

С этого момента рассматриваем соответствующую часть движения команды и приравниваем начало движения к моменту времени $t = 0$. Положим $y_0(t) := -w/2, y_{N+1}(t) := w/2 \forall t \geq 0$, и

$$d_i(t) := y_{i+1}(t) - y_i(t) \quad \forall i = 0, \dots, N. \quad (\text{Б.6})$$

Лемма Б.16. *Следующая функция не убывает:*

$$\mu(t) := \min \left\{ \min_{i=0, \dots, N} d_i(t); \gamma_y \right\}.$$

Доказательство. По теореме Данскина [206], функция $\mu(\cdot)$ абсолютно непрерывна, и для почти всех t выполняется

$$\dot{\mu}(t) = \begin{cases} 0 & \text{когда } \min_{i=0, \dots, N} d_i(t) \geq \gamma_y \\ \dot{d}_{i_t^0}(t) & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (\text{Б.7})$$

где i_t^0 — минимизатор для $\min_i d_i(t)$. Достаточно показать, что $\dot{\mu}(t) \geq 0$ почти для всех t . В первом случае из (Б.7) это очевидно. Пусть выполняется второй случай. Рассмотрим три возможных варианта.

$i^0(t) = 1, \dots, N - 1$. Тогда $\gamma_y > \mu(t) = y_{i^0(t)+1}(t) - y_{i^0(t)}(t)$. Так как $\sum_{i=0}^N d_i(t) = w$, получаем, что $\mu(t) \leq \frac{w}{N+1}$. Следовательно, $\|\mathbf{r}_{i^0(t)+1}(t) - \mathbf{r}_{i^0(t)}(t)\| < R_{\text{sen}}$ по (2.15), последнему

неравенству из (2.19) и следствию Б.3. Таким образом, $G_{i^0(t)}(t) = G_{i^0(t)+1}(t)$, $\alpha_{i^0(t)}(t) = \alpha_{i^0(t)+1}(t)$, и

$$\begin{aligned} \dot{\mu}(t) &= \dot{d}_{i^0}^-(t) \stackrel{(Б.6)}{=} \dot{y}_{i^0(t)+1}(t) - \dot{y}_{i^0(t)}(t) \\ &\stackrel{(2.10)}{=} G[d_{i^0(t)+1,\delta}^+(t)] - G[d_{i^0(t)+1,\delta}^-(t)] - G[d_{i^0(t),\delta}^+(t)] + G[d_{i^0(t),\delta}^-(t)]. \end{aligned} \quad (Б.8)$$

Здесь $d_{i^0(t)+1,\delta}^-(t) = d_{i^0(t),\delta}^+(t) = d_{i^0(t)}(t) = \mu(t)$ по (2.3), так как $\|\mathbf{r}_{i^0(t)+1}(t) - \mathbf{r}_{i^0(t)}(t)\| < R_{\text{sen}}$. Также, $d_{i^0(t)+1,\delta}^+(t) \geq \mu(t)$ и $d_{i^0(t),\delta}^-(t) \geq \mu(t)$ по (2.3). В целом, $\dot{\mu}(t) \geq 0$ по (2.6).

$i^0(t) = 0$. Аналогично, $\mu(t) = y_1(t) - y_0(t) = |y_1(t) + w/2|$. Из (2.14) и (2.22) следует, что угол $\alpha_1(t)$ не может быть под влиянием верхней стены коридора, так как UGV 1 близка $|y_1(t) + w/2| < \gamma_y$ к нижней стене. Следовательно, $\alpha_1(t) \geq 0$ и

$$\dot{\mu}(t) = \dot{d}_0(t) \stackrel{(Б.6)}{=} \dot{y}_1(t) \stackrel{(2.10)}{\geq} G[d_{1,\delta}^+(t)] - G[d_{1,\delta}^-(t)] = G[d_{1,\delta}^+(t)] - G[\mu(t)] \geq 0. \quad (Б.9)$$

$i^0(t) = N$. Подобные рассуждения показывают, что $\dot{\mu}(t) \geq 0$.

□

Положив $\zeta := \mu(0) > 0$, получаем следующее.

Следствие Б.17. $y_{i+1}(t) - y_i(t) \geq \zeta > 0 \forall t, i$.

Лемма Б.18. Производные $\dot{d}_i(t)$ ограничены: существует константа $c > 0$, такая что

$$|\dot{d}_i(t)| \leq c \quad \text{для любого } i = 0, \dots, N \text{ и почти всех } t.$$

Доказательство. Для $i = 1, \dots, N-1$, имеем $d_{i+1,\delta}^-(t) = d_{i,\delta}^+(t)$,

$$\begin{aligned} \dot{d}_i(t) &\stackrel{(Б.3)}{=} \dot{y}_{i+1}(t) - \dot{y}_i(t) \stackrel{(2.10)}{=} G[d_{i+1,\delta}^+(t)] - G[d_{i+1,\delta}^-(t)] \\ &\quad + P \operatorname{tg} \alpha_{i+1}(t) - G[d_{i,\delta}^+(t)] + G[d_{i,\delta}^-(t)] - P \operatorname{tg} \alpha_i(t) \\ &= G[d_{i+1,\delta}^+(t)] - 2G[d_{i,\delta}^+(t)] + G[d_{i,\delta}^-(t)] + P[\operatorname{tg} \alpha_{i+1}(t) - \operatorname{tg} \alpha_i(t)] \\ &\stackrel{(2.6),(2.4)}{\implies} |\dot{d}_i(t)| \leq c := 4\bar{G} + 2P \operatorname{tg} \alpha_*. \end{aligned} \quad (Б.10)$$

Для $i = 0$, имеем

$$\dot{d}_i(t) \stackrel{(Б.3)}{=} \dot{y}_1(t) \stackrel{(2.10)}{=} G[d_{1,\delta}^+(t)] - G[d_{1,\delta}^-(t)] + P \operatorname{tg} \alpha_1(t) \stackrel{(2.6),(2.4)}{\implies} |\dot{d}_i(t)| \leq c. \quad (Б.11)$$

Случай $i = N$ рассматривается аналогично.

□

Рассмотрим функцию $\mathbf{Y}(t) := [y_0(t), \dots, y_{N+1}(t)]$ и напомним, что её ω -предельная точка — это предел $\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{Y}(t_j)$, порожденный неограниченной последовательностью $t_1 < t_2 < \dots < t_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$. Так как компоненты $y_j(t)$ функции $\mathbf{Y}(t)$ ограничены $|y_j(t)| \leq w/2 \forall t \geq 0$, множество $\mathfrak{Y}$ всех ω -предельных точек является компактным не пустым множеством. Элементы $\mathcal{Y} = [y_{-1}^\infty, \dots, y_N^\infty]$ этого множества называются *пределами разворачивания*. Из следствия Б.17 следует, что $y_0^\infty = -w/2 < y_1^\infty < \dots < y_{N+1}^\infty = w/2$.

Лемма Б.19. Следующее неравенство выполняется для любого предельного расположения $\mathcal{Y}$:

$$\frac{w}{N+1} \leq d_i^\infty(\mathcal{Y}) := y_{i+1}^\infty - y_i^\infty \quad \forall i = 0, \dots, N. \quad (\text{Б.12})$$

Доказательство. Прежде всего, введем непрерывное отображение

$$\mathcal{Y} \in \mathfrak{Y} \mapsto m(\mathcal{Y}) := \min_{i=0, \dots, N} d_i^\infty(\mathcal{Y}) \in \mathbb{R}. \quad (\text{Б.13})$$

Предположим противное утверждению леммы, а именно, что (Б.12) неверно для некоторого предельного расположения $\mathcal{Y}_* \in \mathfrak{Y}$. Тогда минимум функции $m(\cdot)$ на компактном множестве $\mathfrak{Y}$ меньше, чем $w/(N+1)$.

Пусть $\overline{\mathcal{Y}} = [\overline{y}_0^\infty, \dots, \overline{y}_{N+1}^\infty] \in \mathfrak{Y}$ — соответствующий минимизатор. В силу (Б.13), $m(\overline{\mathcal{Y}}) = d_i^\infty(\overline{\mathcal{Y}})$ для некоторого i , но не для всех i , так как

$$\sum_{i=0}^N d_i^\infty(\overline{\mathcal{Y}}) = w. \quad (\text{Б.14})$$

Учитывая, что $m(\overline{\mathcal{Y}}) < w/(N+1)$, можно сделать вывод, что существует i , для которого выполняется либо

$$\frac{w}{N+1} > d_i^\infty(\overline{\mathcal{Y}}) = m(\overline{\mathcal{Y}}), \quad m(\overline{\mathcal{Y}}) < d_{i+1}^\infty(\overline{\mathcal{Y}}), \quad (\text{Б.15})$$

$$\text{либо} \quad \min \left\{ \frac{w}{N+1}, d_i^\infty(\overline{\mathcal{Y}}) \right\} > d_{i+1}^\infty(\overline{\mathcal{Y}}) = m(\overline{\mathcal{Y}}). \quad (\text{Б.16})$$

По определению, предельное расположение $\overline{\mathcal{Y}}$ порождено некоторой «родительской последовательностью» $t_1 < t_2 < \dots < t_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$. Уменьшая эту последовательность, если необходимо, обеспечиваем выполнение условия $t_{k+1} \geq t_k + 1 \quad \forall k$. Более того,

$$y_j(t_k) \rightarrow \overline{y}_j^\infty \Rightarrow d_j(t_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} d_j^\infty(\overline{\mathcal{Y}}) \quad \forall j. \quad (\text{Б.17})$$

Случай (Б.15). Используя (Б.15), видим, что при достаточно малом $\kappa > 0$ выполняется следующее неравенство:

$$m(\overline{\mathcal{Y}}) < \min \left\{ d_{i+1}^\infty(\overline{\mathcal{Y}}) - 5\kappa; \frac{w}{N+1} - 3\kappa \right\}. \quad (\text{Б.18})$$

Далее символ $s(k)$ (возможно, с индексами) используется для обозначения k -зависимых величин, которые стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Воспользовавшись c из Леммы Б.18, видим, что для $\varepsilon \leq \min\{\kappa/c; 1\}$ и $t \in [t_k - \varepsilon, t_k]$ выполняется следующее:

$$\begin{aligned} d_i(t) &\leq d_i(t_k) + |d_i(t) - d_i(t_k)| \leq d_i(t_k) + c|t - t_k| \leq d_i(t_k) + c\varepsilon \xrightarrow{(\text{Б.15}), (\text{Б.17})} m(\overline{\mathcal{Y}}) + c\varepsilon + s_i(k) \\ &\stackrel{k \approx \infty}{\leq} m_* := m(\overline{\mathcal{Y}}) + 2\kappa < \frac{w}{N+1} - \kappa < \frac{w}{N+1} \xrightarrow{(2.3), (2.19), (\text{Б.4}), (\text{Б.6}), \text{сл. Б.3}} d_i(t) = d_{i,\delta}^+(t); \\ d_{i+1}(t) &\geq d_{i+1}(t_k) - |d_{i+1}(t) - d_{i+1}(t_k)| \\ &\geq d_{i+1}(t_k) - c|t - t_k| \geq d_{i+1}^\infty(\overline{\mathcal{Y}}) + s_{i+1}(k) - c\varepsilon \\ &\stackrel{k \approx \infty}{\geq} d_{i+1}^\infty(\overline{\mathcal{Y}}) - 2\kappa \geq m_* + \kappa \xrightarrow{m_* + \kappa < \frac{w}{N+1}, (2.3), (2.19), (\text{Б.4}), (\text{Б.6}), \text{сл. Б.3}} d_{i+1,\delta}^+(t) \geq m_* + \kappa; \\ j &\leq N-2 \Rightarrow d_j(t) \geq d_j(t_k) - |d_j(t) - d_j(t_k)| \\ &\geq d_j(t_k) - c\varepsilon \xrightarrow{(\text{Б.17}), d_j^\infty(\overline{\mathcal{Y}}) \geq m(\overline{\mathcal{Y}})} \Delta_j(t) \geq m(\overline{\mathcal{Y}}) + s_j(k) - c\varepsilon. \end{aligned}$$

Предположим сначала, что $i \geq 1$. Если $\alpha_{i+1}(t) = -\alpha_*$, то граф $G_{i+1}(t)$ содержит узел $j \geq i + 1$ на расстоянии $\leq \gamma_y$ от верхней стены коридора. Это расстояние сверху ограничивает $d_j(t)$, где $d_j(t) > d_i(t)$, как установлено выше. Следовательно, $\Delta_i(t) < \gamma_y$, а значит, $G_{i+1}(t) \subset G_i(t)$, и $\alpha_i(t) = -\alpha_*$. Аналогично, $\alpha_i(t) = \alpha_* \Rightarrow \alpha_{i+1}(t) = \alpha_*$. Отсюда следует, что в любом случае $\alpha_{i+1}(t) \geq \alpha_i(t)$, и таким образом

$$\begin{aligned}
t \in [t_k - \varepsilon, t_k] &\Rightarrow \dot{d}_i(t) \stackrel{(B.10)}{\geq} G[d_{i+1,\delta}^+(t)] - 2G[d_{i,\delta}^+(t)] \\
&+ G[d_{i,\delta}^-(t)] \stackrel{(2.6), k \approx \infty}{\geq} G[m(\overline{\mathcal{Y}}) + 3\kappa] - 2G[m(\overline{\mathcal{Y}}) + c\varepsilon + s_i(k)] \\
&+ G[d_{i-1,\delta}^+(t)] \geq G[m(\overline{\mathcal{Y}}) + 3\kappa] - 2G[m(\overline{\mathcal{Y}}) + c\varepsilon + s_i(k)] \\
&+ G[m(\overline{\mathcal{Y}}) + s_{i-1}(k) - c\varepsilon] \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{t \in [t_k - \varepsilon, t_k]} \dot{d}_i(t) \\
&\geq G[m(\overline{\mathcal{Y}}) + 3\kappa] - 2G[m(\overline{\mathcal{Y}}) + c\varepsilon] + G[m(\overline{\mathcal{Y}}) - c\varepsilon] \\
&\stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\longrightarrow} \chi := G[m(\overline{\mathcal{Y}}) + 3\kappa] - G[m(\overline{\mathcal{Y}})] \stackrel{(2.6), (2.15), (B.18)}{>} 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, при соответствующем уменьшении ε (если необходимо) можно гарантировать, что $\dot{\Delta}_i(t) \geq \chi/2$ для всех $t \in [t_k - \varepsilon, t_k]$ и достаточно больших k . Таким образом,

$$d_i(t_k - \varepsilon) = d_i(t_k) - \int_{t_k - \varepsilon}^{t_k} \dot{d}_i(t) dt \leq d_i(t_k) - \chi\varepsilon/2. \quad (B.19)$$

Ограниченная последовательность $\{Y(t_k - \varepsilon)\}_{k=1}^\infty$ имеет сходящуюся подпоследовательность. Её предел $\mathcal{Y}_\varepsilon$ является предельным расположением, для которого соответствующая величина (B.13) меньше, чем значение этой величины при расположении $\overline{\mathcal{Y}}$: это следует из (B.17) (где $t_k \mapsto t_k - \varepsilon$ и $\overline{\mathcal{Y}} \mapsto \mathcal{Y}_\varepsilon$) и (B.19). Однако это противоречит определению $\overline{\mathcal{Y}}$ как минимизатора (B.13). Это противоречие завершает доказательство для случая $i \geq 1$.

В случае (B.15) остаётся рассмотреть ситуацию, когда $i = 0$. Тогда для любого $t \in [t_k - \varepsilon, t_k]$ имеем

$$\begin{aligned}
\dot{d}_i(t) &\stackrel{(B.11)}{\geq} G[d_{0,\delta}^+(t)] - G[d_{0,\delta}^-(t)] = G[d_{0,\delta}^+(t)] - G[d_{-1,\delta}^+(t)] \\
&\stackrel{(2.6), k \approx \infty}{\geq} G[m(\overline{\mathcal{Y}}) + 3\kappa] - G[m(\overline{\mathcal{Y}}) + c\varepsilon + s_{-1}(k)]
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{t \in [t_k - \varepsilon, t_k]} \dot{d}_i(t) &\geq G[m(\overline{\mathcal{Y}}) + 3\kappa] - G[m(\overline{\mathcal{Y}}) + c\varepsilon] \\
&\stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\longrightarrow} \chi_* := G[m(\overline{\mathcal{Y}}) + 3\kappa] - G[m(\overline{\mathcal{Y}})] \stackrel{(2.6), (2.15), (B.18)}{>} 0.
\end{aligned}$$

Доказательство завершается аналогично случаю, когда $i \geq 1$.

Случай (B.16) рассматривается аналогично, с систематической заменой интервалов вида $[t_k - \varepsilon, t_k]$ на $[t_k, t_k + \varepsilon]$ и выбором сходящейся подпоследовательности из последовательности $\{Y(t_k + \varepsilon)\}_{k=1}^\infty$. $\square$

Используя (B.12) и (B.14), приходим к следующему результату.

Следствие Б.20. Следующее равенство верно для любого предельного разложения $\mathcal{Y}$:

$$d_i^\infty(\mathcal{Y}) = \frac{w}{N+1} \quad \forall i = 0, \dots, N. \quad (\text{Б.20})$$

Лемма Б.21. Для любого $i = 1, \dots, N$,

$$y_i(t) \rightarrow -w/2 + iw/(N+1) \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (\text{Б.21})$$

Доказательство. В силу (Б.12) и (Б.20), любое предельное разложение $\mathcal{Y} = [y_0^\infty, \dots, y_{N+1}^\infty]$ удовлетворяет следующим уравнениям:

$$y_i^\infty = -w/2 + iw/(N+1) \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Рассмотрим ω -предельную точку $\bar{y}$ отображения $y_i(\cdot)$. Тогда существует неограниченно возрастающая последовательность времени $\{t_k\}$ такая, что $\bar{y} = \lim_{k \rightarrow \infty} y_i(t_k)$. Кроме того, отмечаем, что ограниченная последовательность $\{Y(t_k)\}_{k=1}^\infty$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Её предел является предельным разложением, i -я компонента которого равна $\bar{y}$. Таким образом, $\bar{y} = -w/2 + iw/(N+1)$, и видим, что все ω -предельные точки ограниченной функции $y_i(\cdot)$ совпадают и равны $-w/2 + iw/(N+1)$. Это доказывает (Б.21) [205, гл. VII, след. 1.1] и завершает доказательство. $\square$

Следствие Б.3, лемма Б.21, (2.15) и последнее неравенство из (2.19) приводят к следующему.

Следствие Б.22. Для достаточно больших t граф $\mathcal{G}(t)$, введённый сразу после (2.24), является связным; более того, его вершины i и $i+1$ соединены ребром для любого $i = 1, \dots, N-1$.

Доказательство Теоремы 2.5.2. следствие Б.22 и (2.7), (2.24) подразумевают существование x_* , для которого $z_i(t) \rightarrow x_* \quad \forall i$ при $t \rightarrow \infty$ [101, 207]. Это, опр. 2.1.1, следствие Б.8, Лемма Б.14 и (Б.21) обеспечивают ii) в Теореме 2.5.2. Его утверждения i) и iii), iv) выполняются в силу Лемм Б.1 и Б.2 соответственно. Утверждение v) выполняется в силу Леммы Б.14; утверждение vi) непосредственно вытекает из v). $\square$

Доказательство замечания 2. Разрывы могут возникать либо из-за препятствий, либо в ситуации, когда $\|r_i - r_j\| = R_{\text{sen}}$ или $|x_i - x_j| = \delta$ для некоторых i, j . Однако этого не может происходить для достаточно больших времён из-за ii) Теоремы 2.5.2, опр. 2.1.1, второго неравенства в (2.15), Леммы Б.2 и следствия Б.15. $\square$

Доказательство замечания 4. Выполняется путём анализа доказательства Теоремы 2.5.2 и наблюдения, что все аргументы остаются действительными. Начиная со следствия Б.15, важно, что заключительная часть $\mathfrak{C}_+ := \{r \in \mathfrak{C} : x \geq x_+\}$ ограничена двумя параллельными прямыми в силу ii) из опр. 2.5.3. $\square$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Приложение к Главе 3

В.1. Доказательство теоремы 3.2.1

Изучаем траекторию системы, управляемую протоколом 1.

Лемма В.1. $x_i(0) < x_j(0) \Rightarrow x_i(t) < x_j(t) \forall t \geq 0$.

Доказательство. Пусть $E := \{(i', i'') : x_{i'}(0) < x_{i''}(0)\}$. Обозначим $[0, \tau)$ как левейшую связную компоненту открытого (в $[0, \infty)$) множества $\{t \geq 0 : x_{i'}(t) < x_{i''}(t) \forall (i', i'') \in E\} \ni 0$. Пусть утверждение леммы неверно. Тогда существует $0 < \tau < \infty$ и существуют $G \subset [0 : N - 1]$ и $x_* \in \mathbb{R}$, такие что $x_i(\tau) = x_*$ для всех $i \in G$, $x_i(\tau) \neq x_*$ для всех $i \notin G$, и существует $i', i'' \in G$ для некоторой пары $(i', i'') \in E$. Пусть $m_{\pm}(t) := \pm \max_{i \in G} \pm x_i(t)$ и пусть $i^{\pm}(t)$ будет соответствующим максимумом. Тогда $\Delta(t) := m_+(t) - m_-(t) > 0$ для всех $t \in [0, \tau)$, и $\Delta(\tau) = 0$. По теореме Данскина [206], функции $m_{\pm}(\cdot)$ абсолютно непрерывны, и $\dot{m}_{\pm}(t) = \dot{x}_{i^{\pm}(t)}(t)$ почти всюду для $t \in [0, \tau)$. Поскольку $0 \leq d_{i^+}^-(t), d_{i^-}^+(t) \leq \Delta(t)$ по (3.5), (3.6), имеем для почти всех $t < \tau, t \approx \tau$:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}(t) &= \dot{x}_{i^+}(t) - \dot{x}_{i^-}(t) \stackrel{(3.1)}{=} u_{i^+}(t) - u_{i^-}(t) \stackrel{(3.7)}{=} \Xi[d_{i^+}^+(t)] \\ &\quad - \Xi[d_{i^+}^-(t)] - \Xi[d_{i^-}^+(t)] + \Xi[d_{i^-}^-(t)] \stackrel{(3.4)}{\geq} -2\Xi[\Delta(t)]. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Здесь $\Xi(0) = 0$ по (3.4). Таким образом, решение для $\Delta_* \equiv 0$ удовлетворяет ассоциированному ОДУ $\dot{\Delta} = -2\Xi[\Delta]$, и $\Delta(\tau - \varepsilon) > \Delta_*(\tau - \varepsilon)$, если $\varepsilon > 0, \varepsilon \approx 0$. Тогда по [208, гл. III, теор. 4.1] имеем $\Delta(\tau) > \Delta_*(\tau)$, что противоречит свойству $\Delta(\tau) = 0$. Это противоречие завершает доказательство. $\square$

Следствие В.2. Для любых агентов i, j либо $E_{i,j} := \{t \geq 0 : x_i(t) < x_j(t)\} = \emptyset$, либо $E_{i,j} = [0, \infty)$, либо $E_{i,j} = (\tau, \infty)$ и $x_i(t) = x_j(t) \forall t \in [0, \tau)$ с некоторым $\tau > 0$.

Следствие В.3. Протокол 1 не вызывает столкновений.

Лемма В.4. Протокол 1 сохраняет ближайших соседей.

Доказательство. По определению 3.1.3 и следствиям В.2, В.3, достаточно показать, что $\mathcal{T} := \{t \geq 0 : \Delta x_{i,j}(t) < R_{\text{sen}}\} = [0, \infty)$, если $0 < \Delta x_{i,j}(0) < R_{\text{sen}}$ и $x_k(t) \notin (x_i(t), x_j(t)) \forall t \geq 0, k$. Предположим, что $\mathcal{T} \neq [0, \infty)$. Тогда существует $\tau \in (0, \infty)$ для левой наиболее связанной компоненты $[0, \tau)$ множества $\mathcal{T}$, и $\Delta(t) := \Delta x_{i,j}(t) < R_{\text{sen}}$ для всех $t \in [0, \tau)$, $\Delta(\tau) = R_{\text{sen}}$. Также, $d_j^-(t) = d_i^+(t) = \Delta(t), d_i^-(t), d_j^+(t) \leq R_{\text{sen}}$ по (3.5), (3.6). Для почти всех $t \in [0, \tau)$:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}(t) &= \dot{x}_j(t) - \dot{x}_i(t) \stackrel{(3.1),(3.7)}{=} \Xi[d_j^+(t)] - \Xi[d_j^-(t)] \\ &\quad - \Xi[d_i^+(t)] + \Xi[d_i^-(t)] \stackrel{(3.4)}{\leq} 2\Xi[R_{\text{sen}}] - 2\Xi[\Delta(t)]. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Ассоциированный ОДУ $\dot{\Delta} = 2\Xi[R_{\text{sen}}] - 2\Xi[\Delta]$ имеет решение $\Delta_* \equiv R_{\text{sen}}$, такое что $\Delta_*(0) > \Delta(0)$. По [208, гл. III, теор. 4.1] имеем $\Delta(\tau) < \Delta_*(\tau) = R_{\text{sen}}$, что противоречит $\Delta(\tau) = R_{\text{sen}}$, что завершает доказательство. $\square$

С этого момента и вплоть до ”Доказательства теоремы 3.2.1” будем использовать следующее.

Предположение В.5. Начальное состояние не вызывает столкновений и не разрушает систему.

По определению 3.1.3, следствиям В.3 и лемме В.4, состояние неразруσιμο для всех $t \geq 0$, и агенты могут быть индексированы так, что выполняется (3.2). Пусть

$$\begin{aligned} \Delta_i(t) &:= x_{i+1}(t) - x_i(t), \quad i \in [0 : N-2], \quad \Delta_{-1}(t) \\ &:= \Delta_{N-1}(t) := w, \quad \Delta(t) := [\Delta_0(t), \dots, \Delta_{N-2}(t)]^\top. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Следствие В.6. Функция $\Delta(\cdot)$ ограничена на интервале $[0, \infty)$.

Напомним, что ω -предельная точка для $\Delta(\cdot)$ — это $\lim_{j \rightarrow \infty} \Delta(t_j)$, связанная с некоторой неограниченной последовательностью $t_1 < \dots < t_j < \dots$. По следствию В.6, множество Ω всех таких точек не пусто и компактно.

Лемма В.7. $\varsigma_- := \min_{\Delta \in \Omega} \min_{i \in [0:N-2]} \Delta_i \geq w$, $\varsigma_+ := \max_{\Delta \in \Omega} \max_{i \in [0:N-2]} \Delta_i \leq w$.

Доказательство. Предположим, что $\varsigma_- < w$. Рассмотрим минимум Δ для вышеуказанного $\min_{\Delta \in \Omega}$ и соответствующую последовательность $\{t_k\}_{k=1}^\infty$, и обозначим $J := \{j : \Delta_j = \varsigma_-\} \neq \emptyset$ и положим $i := \max_{j \in J} j$, $\Delta_{-1} := \Delta_{N-1} := w$. Тогда $\Delta_i < w$, $\Delta_{i+1} > \Delta_i$, $\Delta_{i-1} \geq \Delta_i$. Из уравнений (3.1) и (B.3) имеем

$$|\dot{\Delta}_j| \leq 2\bar{u} \quad \forall j \in [-1 : N-1]. \quad (\text{B.4})$$

Выбираем $\xi > 0$ и $\varepsilon > 0$ так, что $\xi < \min\{\Delta_{i+1} - \Delta_i; w - \Delta_i\}$, $\varepsilon < \min\{\xi\mu_-/(2\mu_+); w - \xi - \Delta_i; \Delta_{i+1} - \Delta_i - \xi\}$, где

$$\mu_+ := \max_{z \in [0, R_{\text{sen}}]} \Xi'(z) > 0, \quad \mu_- := \min_{z \in [0, R_{\text{sen}}]} \Xi'(z) > 0, \quad (\text{B.5})$$

и положим $\delta := \varepsilon/(4\bar{u})$, $t_k^- := t_k - \delta$. Для $t \in [t_k^-, t_k]$ и $k \approx \infty$,

$$\begin{aligned} \Delta_{i+1}(t) - \Delta_i(t) &\stackrel{(\text{B.4})}{\geq} \Delta_{i+1}(t_k) - \Delta_i(t_k) - 4\bar{u}\delta \geq \xi + \varepsilon - 4\bar{u}\delta = \xi, \\ \Delta_{i-1}(t) - \Delta_i(t) &\stackrel{(\text{B.4})}{\geq} \Delta_{i-1}(t_k) - \Delta_i(t_k) - 4\bar{u}\delta \geq -\varepsilon - 4\bar{u}\delta = -2\varepsilon. \end{aligned}$$

Положим $\varkappa := \mu_- \xi - 2\varepsilon\mu_+ > 0$. По леммам В.1, В.4 и уравнениям (3.4), (3.5),

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_i(t) &= \Xi[\Delta_{i+1}(t)] - \Xi[\Delta_i(t)] - \Xi[\Delta_i(t)] + \Xi[\Delta_{i-1}(t)] \\ &\geq \varkappa \Rightarrow \Delta_i(t_k^-) = \Delta_i(t_k) - \int_{t_k^-}^{t_k} \dot{\Delta}_i(t) dt \leq \Delta_i(t_k) - \delta\varkappa. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Выбирая сходящуюся подпоследовательность из $\{\Delta(t_k^-)\}_k$, получаем $\Delta^- \in \Omega$ с $\Delta_i^- \leq \Delta_i - \varkappa\delta$. Тогда $\min_{j \in [0:N-2]} \Delta_j^- < \Delta_i = \varsigma_-$. Таким образом, Δ не является минимумом, что противоречит его выбору. Это противоречие доказывает, что $\varsigma_- \geq w$. Неравенство $\varsigma_+ \leq w$ доказывается аналогично. $\square$

Лемма В.8. Для любого $i \in [0 : N - 2]$ **(а)** $\Delta_i(t) \rightarrow w$ при $t \rightarrow \infty$, и **(б)** это сходимость экспоненциально быстрая.

Доказательство. Из леммы В.7 следует, что Ω имеет только одну точку Δ_w , то есть ту, где $\Delta_i = w \ \forall i$. Следовательно, $\Delta(t) \rightarrow \Delta_w$ по [208, гл. VII, след. 1.1]. Это и первая часть уравнения (3.3) дает, что $\Delta_i(t) < R_{\text{sen}} \ \forall i \in [0 : N - 2]$ для всех достаточно больших значений t . Будем рассматривать их. Аналогично уравнению (В.2), имеем

$$\dot{\Delta}_i = \Xi[\Delta_{i+1}] + \Xi[\Delta_{i-1}] - 2\Xi[\Delta_i] \quad \forall i \in [0 : N - 2]. \quad (\text{В.7})$$

Замена переменной $\tau \mapsto \Xi'(w)t$ (где $\Xi'(w) > 0$ по (3.4)) приводит систему (В.7), линейзованную вблизи равновесия Δ_w , к виду $\dot{\Delta} = (-2I + A)\Delta$. Здесь I — единичная матрица, а A — матрица размером $(N - 1) \times (N - 1)$ с единицами над и под диагональю и нулями во всех других местах. Если $N = 2$, то $A = 0$ и, следовательно, спектральный радиус $\rho(A) = 0 < 2$. Пусть $N \geq 3$. Граф, связанный с A , $\Gamma(A)$ (определен в [209, опр. 6.2.11]), имеет набор узлов $[0 : N - 2]$, является неориентированным, так как A симметрична, и имеет ребро, связывающее i и $i + 1$ для любого $i \in [0 : N - 3]$. Таким образом, $\Gamma(A)$ сильно связан, и поэтому матрица A является неприводимой по [209, теор. 6.2.24]. Поскольку её элементы неотрицательны, $\rho(A)$ — это собственное значение, связанное с собственным вектором $\Delta = (\Delta_0, \dots, \Delta_{N-2})^\top$, для которого $\Delta_i > 0 \ \forall i$ по [209, теор. 8.4.4]. Таким образом, $A\Delta = \rho(A)\Delta$, или, эквивалентно,

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \rho(A)\Delta_0, \quad \Delta_0 + \Delta_2 = \rho(A)\Delta_1, \quad \Delta_1 + \Delta_3 = \rho(A)\Delta_2, \dots, \\ \dots, \Delta_{N-4} + \Delta_{N-2} &= \rho(A)\Delta_{N-3}, \quad \Delta_{N-3} = \rho(A)\Delta_{N-2}. \end{aligned}$$

Суммируя эти уравнения, видим, что

$$\rho(A) \sum_{i=0}^{N-2} \Delta_i = 2 \sum_{i=0}^{N-2} \Delta_i - \Delta_0 - \Delta_{N-2} < 2 \sum_{i=0}^{N-2} \Delta_i \Rightarrow \rho(A) < 2.$$

Из этого следует, что линейная система $\dot{\Delta} = (-2I + A)\Delta$ экспоненциально устойчива. Доказательство завершено по [210, теор. 3.7]. $\square$

Легко проверить, что наличие фиксированной точки (например, якоря) среди агентов не нарушает утверждения Лемм В.7 и В.8(а).

Доказательство Теоремы 3.2.1: Утверждение **i)** следует из следствия В.3 и Леммы В.4.

iii) Пусть $i^\pm(t)$ — максимизатор для $m_\pm(t) := \pm \max_i \pm x_i(t)$. По теореме Данскина [206], $m_\pm(\cdot)$ абсолютно непрерывно, и $\dot{m}_\pm(t) = \dot{x}_{i^\pm(t)}(t)$ почти всюду на t . Тогда $d_{i^+(t)}^+(t) = d_{i^-(t)}^-(t) = w = 0$ по (3.5), (3.6). Остается отметить, что для почти всех t по (3.1), (3.4), (3.7), $\dot{m}_\pm(t) = \mp \Xi[d_{i^\pm(t)}^\pm(t)] \leq 0$, если $i^\pm(t)$ не является якорем, и $\dot{m}_\pm(t) = 0$ в противном случае.

ii.а) По следствию В.2, команда в конечном итоге делится на постоянные группы, так что состояния внутри каждой группы всегда одинаковы и различаются между группами. Сдвигая

нулевой момент времени достаточно далеко вправо и рассматривая эти группы как «агентов», доказательство сводится к случаю начального состояния без столкновений. Сохраняя начальную нотацию и используя перечисление (3.2), получаем

$$\dot{x}_0(t) \stackrel{(3.1)}{=} u_0(t) \stackrel{(3.7)}{=} \Xi[d_0^+(t)] - \Xi[d_0^-(t)] \stackrel{(3.2),(3.5),(3.6)}{=} \Xi[d_0^+(t)] - \Xi[w].$$

Здесь по (3.2), (3.5), (3.6), Лем. В.8 и первой части (3.3), $d_0^+(t) = \Delta_0(t)$ для всех больших t . Для них, $|\dot{x}_0(t)| = |\Xi[\Delta_0(t)] - \Xi[w]| \leq \mu_+ |\Delta_0(0) - w|$ по (В.5). Таким образом, по **б)** в Лем. В.8, $\int_0^\infty |\dot{x}_0(t)| dt < \infty$ и существует $x_* := \lim_{t \rightarrow \infty} x_0(t)$. Лем. В.8 дает, что $x_i(t) = x_0(t) + \sum_{j=0}^{i-1} \Delta_j(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x_* + iw$, т.е., «групповые агенты» достигают равномерного самораспределения с шагом w по Определению 3.1.2. Этот вывод распространяется на настоящих агентов, если $w = 0$ или начальное состояние не имеет столкновений, поскольку в последнем случае любая группа является одиночным элементом по **и)** в Теореме 3.2.1.

ii.б) Доказано сдвигом начала временной оси в момент выхода и применением ii.а).

ii.с) Доказательство очевидно из Лем. В.8(а), комментариев к нему и вышеупомянутого замечания с «групповыми агентами».

В.2. Доказательства Теорем 3.3.1 и 3.3.2

Вводятся следующие обозначения и изменения:

Контекст Теоремы 3.3.1	Контекст Теоремы 3.3.2
$\Delta_{-1}(t) = x_0(t) - x_+, x_{-1}(t) = x_+, x_N(t) = \infty$	$\Delta_{-1}(t) = x_0(t) - x_-, \Delta_{N-1}(t) = x_+ - x_{N-1}(t), x_{-1}(t) = x_-, x_N(t) = x_+$

Отметим, что первая формула в (В.3) распространяется на $i = -1$ и, в случае Теоремы 3.3.2, на $i = -1, N - 1$.

Лемма В.1. Лемма В.1 остаётся верной для $i, j \in [-1 : N]$.

Доказательство. Достаточно повторить доказательство Лем. В.1, изменив (В.1), если $i^+(t)$ или $i^-(t)$ является фиктивным агентом, то есть равным либо x_+ , либо x_- . Поскольку $x_{i^+(t)}(t) > x_{i^-(t)}(t)$ и $x_{i^+(t)}(t) \approx x_{i^-(t)}(t)$ (для $t < \tau, t \approx \tau$), только один из «агентов» $i^+(t), i^-(t)$ является фиктивным. Тогда в (В.1) соответствующая производная $\dot{x}_{i^\pm(t)}(t)$ исключается, как и ее потомки. Тогда результат $\dot{\Delta} \geq -2\Xi(\Delta)$ из (В.1) изменяется на $\dot{\Delta} \geq -\Xi(\Delta)$, что сохраняет последние три предложения (с ОДУ $\dot{\Delta} = -\Xi(\Delta)$) доказательства. $\square$

Следствие В.2. Оба протокола 2 и 3 не имеют столкновений.

Таким образом, если начальное состояние не имеет столкновений, агенты могут быть индексированы так, что

$$x_{-1}(t) < x_0(t) < x_1(t) < \dots < x_{N-1}(t) < x_N(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{В.8})$$

Лемма В.3. Протоколы 2 и 3 сохраняют ближайших соседей.

Доказательство. Достаточно повторить доказательство Лем. В.4, изменив его, где это необходимо, аналогично доказательству Лем. В.1. $\square$

Замечание 13. Теми же аргументами показывается, что в контексте Теоремы 3.3.1, $\Delta_{-1}(0) < R_{\text{sen}} \Rightarrow \Delta_{-1}(t) < R_{\text{sen}} \forall t \geq 0$.

Доказательство. По следствию В.2 и Лем. В.3, утверждение **и**) в Теореме 3.2.1 выполняется. Пусть начальное состояние не имеет столкновений. Поскольку $x_{-1}(t) \equiv x_-$, $x_N(t) \equiv x_+$ в (В.8), $X(t) := \{x_i(t)\}_{i=0}^{N-1}$ ограничено на $[0, \infty)$. Пусть $\Omega_X \subset [x_-, x_+]$ — компактное множество ω -предельных точек $X(\cdot)$; по (В.8), $x_{i+1} \geq x_i$ для всех i и $X = \{x_i\}_{i=0}^{N-1} \in \Omega_X$. Покажем, что

$$\min_{X \in \Omega_X} \min_{j \in [-1:N-1]} \Delta_j(X) \geq q := \frac{L}{N+1}, \text{ где } L := x_+ - x_-. \quad (\text{В.9})$$

Предположим обратное. Возьмем минимизатор X из $\min_{X \in \Omega_X}$, соответствующую последовательность $\{t_k\}_{k=1}^\infty$ и минимизатор i из $\min_{j \in [-1:N-1]}$ в (В.9). Поскольку $\Delta_i := x_{i+1} - x_i < q$ и $\sum_{i=-1}^{N-1} \Delta_i = L$, существует $j \leq N-1$, такой что $\Delta_j > q$. Тогда i можно выбрать так, чтобы **1**) $i \geq 0$, $\Delta_{i-1} > q$ или **2**) $i \leq N-2$, $\Delta_{i+1} > q$. Рассмотрим случай **1**); случай **2**) обрабатывается аналогично.

По предположениям Теоремы 3.3.2, $q < w < R_{\text{sen}}$. Возьмем $\mu_\pm$ из (В.5) и выберем $\xi \in (0, \min\{\Delta_{i-1} - \Delta_i; w - q\})$, $0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{\xi\mu_-}{2\mu_+}; w - q - \xi; \Delta_{i-1} - \Delta_i - \xi\right\}$, $\delta := \varepsilon/(4\bar{u})$, $t_k^- := t_k - \delta$. Тогда для $t \in [t_k^-, t_k]$ и достаточно больших k , имеем

$$\begin{aligned} \Delta_i(t) + \xi &\leq \Delta_i(t_k) + \xi + 2\bar{u}\delta \leq q + \xi + \varepsilon \leq w < R_{\text{sen}}, \\ \Delta_{i-1}(t) - \Delta_i(t) &\geq \Delta_{i-1}(t_k) - \Delta_i(t_k) - 4\bar{u}\delta \geq \xi + \varepsilon - 4\bar{u}\delta \geq \xi, \\ \Delta_{i+1}(t) - \Delta_i(t) &\geq \Delta_{i+1}(t_k) - \Delta_i(t_k) - 4\bar{u}\delta \geq -2\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{В.10})$$

По (3.6), $d_i^-(t) \geq \min\{\Delta_{i-1}(t); w\} \geq \Delta_i(t) + \xi$ и если $i \leq N-2$, то $d_{i+1}^+(t) \geq \min\{\Delta_{i+1}(t); w\} \geq \Delta_i(t) - 2\varepsilon$. Таким образом, если $i \leq N-2$,

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_i(t) &= \Xi[d_{i+1}^+(t)] + \Xi[d_i^-(t)] - 2\Xi[\Delta_i(t)] \stackrel{(3.4)}{\geq} \Xi[\Delta_i(t) - 2\varepsilon] \\ &\quad - \Xi[\Delta_i(t)] + \Xi[\Delta_i(t) + \xi] - \Xi[\Delta_i(t)] \stackrel{(\text{В.5})}{\geq} \varkappa := \mu_- \xi - 2\mu_+ \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Если $i = N-1$, то $\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_N = 0$ и, как выше,

$$\dot{\Delta}_i(t) = -\dot{x}_i(t) = \Xi[d_i^-(t)] - \Xi[\Delta_i(t)] \geq \mu_- \xi > \varkappa.$$

В любом случае, $\Delta_i(t_k^-) = \Delta_i(t_k) - \int_{t_k^-}^{t_k} \dot{\Delta}_i(t) dt \leq \Delta_i(t_k) - \delta \varkappa$. Выбирая сходящуюся подпоследовательность из $\{X(t_k^-)\}_k$, получаем ω -предельную точку $X^\downarrow$ с $\Delta_i^\downarrow \leq \Delta_i - \varkappa\delta$, что противоречит определению X как минимизатора в (В.9). Это противоречие доказывает (В.9).

Для любого $X \in \Omega_X$ по (В.9) имеем $x_{i+1} - x_i \geq q \forall i \leq N-1$, и $\sum_{i=-1}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) = L$. Тогда $x_{i+1} - x_i = q \forall i$ и $x_{-1} = x_- \Rightarrow x_i = x_- + iq \forall i$ для любой ω -предельной точки X . Следовательно, такая точка является единственной, и поэтому $x_i(t) \rightarrow x_- + iq$ при $t \rightarrow \infty$ для всех i [208, гл. VII, след. 1.1]. Таким образом, приходим к 3) в Определении 3.1.2. Последнее утверждение Теоремы 3.3.2 доказывается последовательным сдвигом начала отсчёта времени в моменты потерь и применением вышеизложенного. $\square$

Следующие леммы предполагают выполнение **и)** из Теоремы 3.3.1.

Лемма В.4. Если $i \leq N - 2$ и $\Delta_i(t) \geq R_{\text{sen}}$, то $\dot{x}_{i+1}(t) \leq 0$.

Доказательство. Пусть $\Delta_i(t) \geq R_{\text{sen}}$. По Протоколу 2, $d_{i+1}^-(t) = R_{\text{sen}}$, в то время как $d_{i+1}^+(t) \leq R_{\text{sen}}$ по предположению 3.1.1, (3.5), (3.6) и первой части (3.3). Тогда по (3.1), (3.4) и (3.7), $\dot{x}_{i+1}(t) = u_{i+1}(t) = \Xi[d_{i+1}^+(t)] - \Xi[d_{i+1}^-(t)] \leq 0$. $\square$

Следствие В.5. Состояние $X(t) := \{x_i(t)\}_{i=0}^{N-1}$ ограничено на $[0, \infty)$.

Доказательство. Достаточно показать, что $x_i(\cdot)$ ограничено с использованием индукции по $i \in [-1 : N - 1]$. Поскольку $x_{-1}(t) \equiv x_{\dagger}$, утверждение верно для $i = -1$. Пусть оно верно для некоторого $i \in [-1 : N - 2]$, то есть $b := \sup_{t \geq 0} x_i(t) < \infty$. Если **и)** $\Delta_i(t) \geq R_{\text{sen}} \forall t \geq 0$, то $\dot{x}_{i+1}(t) \leq 0 \forall t \geq 0$ по Лем. В.4 и следовательно $x_{i+1}(t) \leq x_{i+1}(0) < \infty \forall t \geq 0$. Если **и)** не выполняется, существует t_* , такое что $\Delta_i(t_*) < R_{\text{sen}}$. Тогда для $t \geq t_* \Rightarrow \Delta_i(t) < R_{\text{sen}}$ по Лем. В.3, и следовательно $x_{i+1}(t) = x_i(t) + \Delta_i(t) \leq b + R_{\text{sen}}$. Отсюда $\sup_{t \geq 0} x_{i+1}(t) \leq \max \{ \max_{t \in [0, t_*]} x_{i+1}(t); b + R_{\text{sen}} \} < \infty$. $\square$

По следствию В.5 множество Ω_X ω -предельных точек $X(\cdot)$ является компактным, и $\Omega_X \neq \emptyset$. По (В.8), $x_{i+1} \geq x_i \forall i, X \in \Omega_X$.

Лемма В.6. $\Delta_i < R_{\text{sen}} \forall i \in [-1 : N - 1]$ для любого $X \in \Omega_X$.

Доказательство. Доказательство идет по индукции по $i = N - 1, \dots, -1$. Для $i = N - 1$ утверждение следует из первой части (3.3), поскольку $\Delta_{N-1} \equiv w$. Пусть утверждение верно для некоторого $i \in [0 : N - 1]$, то есть $\zeta := \max_{X \in \Omega_X} \Delta_i < R_{\text{sen}}$. Выбираем $\xi \in (\max\{\zeta, w\}, R_{\text{sen}})$. Тогда $\Delta_i(t) < \xi \forall t \approx \infty$, поскольку в противном случае, если $\Delta_i(t_k) \geq \xi \forall k$ для некоторой неограниченной последовательности $t_1 < t_2 < \dots$, и выбрав сходящуюся подпоследовательность $\{X(t_{k_j})\}_j$ из $\{X(t_k)\}_k$ и взяв ее предел $X \in \Omega_X$, придем к противоречию $\Delta_i(X) \geq \xi > \zeta$ с определением ζ .

Предположим, что $\Delta_{i-1}(t) \geq R_{\text{sen}} \forall t \geq 0$. По предположению 3.1.1, (3.5), (3.6) и Протоколу 2, $d_i^-(t) = R_{\text{sen}}, d_i^+(t) \leq \xi \forall t \approx \infty$. По (3.1), (3.4), (3.7), $\dot{x}_i = \Xi[d_i^+] - \Xi[d_i^-] \leq \Xi[w] - \Xi[R_{\text{sen}}] < 0 \forall t \approx \infty \Rightarrow x_i(t) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow \infty$, что противоречит (В.8), где $x_{-1} \equiv x_{\dagger}$. Следовательно, существует $\tau \geq 0 : \Delta_{i-1}(\tau) < R_{\text{sen}}$, и $\Delta_{i-1}(t) < R_{\text{sen}} \forall t \geq \tau$ по Лем. В.3 и замечанию 13.

Сосредоточимся на $t \geq \tau$. Пусть $i \geq 1$. По (3.1), (3.5)–(3.7),

$$\dot{\Delta}_{i-1} = \Xi[d_i^+] + \Xi[d_{i-1}^-] - 2\Xi[\Delta_{i-1}] \leq \Xi[\xi] + \Xi[R_{\text{sen}}] - 2\Xi[\Delta_{i-1}].$$

По [208, гл. III, теор. 4.1], $\Delta_{i-1}(t) \leq \Delta_*(t) \forall t \geq \tau$, где $\dot{\Delta}_* = \Xi[\xi] + \Xi[R_{\text{sen}}] - 2\Xi[\Delta_*]$ и $\Delta_*(\tau) = \Delta_i(\tau) \in (0, R_{\text{sen}})$. По (3.4), $\frac{1}{2}[\Xi(\xi) + \Xi(R_{\text{sen}})] \in (\Xi(0), \Xi(R_{\text{sen}})) \Rightarrow \exists \lambda \in (0, R_{\text{sen}})$ такое, что $\Xi(\lambda) = \frac{1}{2}[\Xi(\xi) + \Xi(R_{\text{sen}})]$. Тогда $\dot{\Delta}_* = g(\Delta_*)$, где $g(z) := 2[\Xi(\lambda) - \Xi(z)], g(\lambda) = 0$, и $g(z)(z - \lambda) < 0 \forall z \in (0, R_{\text{sen}}), z \neq \lambda$. Следовательно, постоянное решение $\Delta(t) \equiv \lambda$ для ОДУ $\dot{z} = g(z)$ притягивает все решения, начинающиеся в $(0, R_{\text{sen}})$. В частности, $\Delta_*(t) \rightarrow \lambda$ как $t \rightarrow \infty$, и так $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \Delta_{i-1}(t) \leq \lambda$. Отсюда следует, что $\Delta_{i-1} \leq \lambda < R_{\text{sen}} \forall X \in \Omega_X$.

Если $i = 0$, то указанное выше дифференциальное неравенство изменяется на $\dot{\Delta}_{-1} = \Xi[d_0^+] - \Xi[\Delta_{-1}] \leq \Xi[\xi] - \Xi[\Delta_{-1}]$. Как и ранее, это приводит к тому, что $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \Delta_{-1}(t) \leq \xi \Rightarrow \Delta_{-1} \leq \xi < R_{\text{sen}} \forall X \in \Omega_X$. $\square$

Лемма В.7. $\max_{X \in \Omega_X} \max_{i \in [-1:N-2]} \Delta_i \leq w$.

Доказательство. Предположим противное. Выберем максимизатор X для $\max_{X \in \Omega_X}$, соответствующую последовательность $\{t_k\}_{k=1}^\infty$ и максимизатор i для $\max_{i \in [-1:N-2]} \Delta_i$. Тогда $\Delta_i = x_{i+1} - x_i > w$ и $\Delta_{N-1} = w$. Значит, $\Delta_i > \Delta_{i+1}$ для некоторого максимизатора i . С учетом $\mu_\pm$ из (В.5), выбираем $\xi \in (0, \min\{\Delta_i - \Delta_{i+1}; R_{\text{sen}} - w\})$, $0 < \varepsilon < \min\{\xi\mu_-/(2\mu_+); \Delta_i - \Delta_{i+1} - \xi\}$, $\delta := \varepsilon/(4\bar{u})$, $t_k^- := t_k - \delta$. Для $t \in [t_k^-, t_k]$ и $k \approx \infty$, по Лем. В.6 имеем $\Delta_j(t) < R_{\text{sen}} \forall j$, и как в (В.10),

$$\begin{aligned} \Delta_i(t) - \Delta_{i+1}(t) &\geq \Delta_i(t_k) - \Delta_{i+1}(t_k) - 4\bar{u}\delta \geq \xi + \varepsilon - 4\bar{u}\delta = \xi, \\ i \geq 0 &\Rightarrow \Delta_i(t) - \Delta_{i-1}(t) \geq \Delta_i(t_k) - \Delta_{i-1}(t_k) - 4\bar{u}\delta \geq -2\varepsilon. \end{aligned}$$

По предположению 3.1.1 и (3.5), (3.6), $d_{i+1}^+(t) = \Delta_{i+1}(t)$, $d_{i+1}^-(t) = \Delta_i(t) = d_i^+(t)$ и $i \geq 0 \Rightarrow d_i^-(t) = \Delta_{i-1}(t)$. Положив $\varkappa := \mu_- \xi - 2\varepsilon\mu_+ > 0$, видим, что для $i \geq 0$ по (В.6) все еще выполняется (3.1) и (3.7), и так

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_i(t) &= \Xi[\Delta_{i+1}(t)] + \Xi[\Delta_{i-1}(t)] - 2\Xi[\Delta_i(t)] \leq -\varkappa \\ \Rightarrow \Delta_i(t_k^-) &= \Delta_i(t_k) - \int_{t_k^-}^{t_k} \dot{\Delta}_i(t) dt \geq \Delta_i(t_k) + \delta\varkappa. \end{aligned}$$

Выбирая сходящуюся подпоследовательность из ограниченной последовательности $\{X(t_k^-)\}_k$, получаем $X^- \in \Omega_X$ с $\Delta_i^- \geq \Delta_i + \varkappa\delta$. Тогда $\max_{i \in [-1:N-2]} \Delta_i^- \geq \Delta_i^- > \Delta_i$, что противоречит определению X как максимизатора. Это противоречие завершает доказательство для $i \geq 0$.

Если $i = -1$, то (В.6) изменяется на $\dot{\Delta}_{-1}(t) = \Xi[\Delta_0(t)] - \Xi[\Delta_{-1}(t)] \leq -\mu_- \xi < 0$. Таким образом, до второстепенных деталей, использованная линия рассуждений остаётся верной и завершает доказательство. $\square$

Лемма В.8. $\min_{X \in \Omega_X} \min_{i \in [-1:N-2]} \Delta_i \geq w$.

Доказательство. Достаточно повторить доказательство Лем. В.7, подставив $[-1 : N-2]$ вместо $[0 : N-2]$ и исключив $\Delta_{-1} := w$. $\square$

Доказательство Теоремы 3.3.1: По Следствию В.2 и Лем. В.3, **i)** из Теоремы 3.2.1 выполняется. Пусть **i)** из Теоремы 3.3.1 выполнено. Тогда для любого $X \in \Omega_X$ Лем. В.7 и В.8 гарантируют, что $x_{i+1} - x_i = w \forall i \in [-1 : N-2]$, где $x_{-1} = x_+$, и так $x_i = x_+ + (i+1)w \forall i \leq N-1$. Следовательно, w -предельная точка единственна. Таким образом, $x_i(t) \rightarrow x_+ + w(i+1)$ при $t \rightarrow \infty$ для всех $i \leq N-1$ по [208, гл. VII, след. 1.1], и приходим ко второму утверждению в Определении 3.1.2. Последнее утверждение Теоремы 3.3.1 доказано путем последовательного сдвига нуля оси времени на моменты потерь и применения приведенного выше.

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Приложение к Главе 5

Г.1. Доказательство теоремы 5.2.1

Сокращение “почти всюду” обозначается как “п.в.”. Символы $\oplus$ и $\ominus$ обозначают сложение и вычитание по модулю N ; символы $f(\tau+)$ и $f(\tau-)$ обозначают соответственно правый и левый пределы функции $f(\cdot)$ в точке τ . В разделе Г.1 используются предположения теоремы 5.2.1 и применяется система отсчёта, вращающаяся вокруг начала координат с угловой скоростью $\omega^0(t) := 2\pi v^0(t)/p$ (см. рис. 5.2а). Это преобразует основные переменные, формулы и условия следующим образом:

$$s_i(t) \mapsto s_i(t) - \int_0^t v^0(s) ds, \quad v_i(t) \mapsto v_i(t) - v^0(t), \quad (\text{Г.1})$$

$$(5.2) \mapsto \ddot{s}_i(t) = \tilde{f}[\dots] := f_i[t, P(t), \mathbf{V}(t), u_i(t), \boldsymbol{\xi}_i(t)] - \dot{v}^0(t), \quad (\text{Г.2})$$

$$(5.15) \Leftrightarrow \Sigma_i = v_i - k(\delta_i^+ + \delta_i^-), \quad |v_i| \leq \varepsilon_v \xrightarrow{(5.8), (\text{Г.1})} (5.7), \quad (\text{Г.3})$$

$$(5.17), (5.18) \Leftrightarrow k\delta_i^-(0) < v_i(0) < k\delta_i^+(0), \quad |v_i(0)| < \varepsilon_v, \quad (\text{Г.4})$$

$$(5.11) \Leftrightarrow \pm \tilde{f}_i[t, P, \mathbf{V}, u_i^{(\pm 1)}, \boldsymbol{\xi}_i(t)] \geq \mu. \quad (\text{Г.5})$$

Сначала приводится чисто технический факт.

Лемма Г.1. Пусть заданы $t_0 < \tau$ и $\varepsilon > 0$, а абсолютно непрерывная функция $\eta : [t_0, \tau) \rightarrow [-\Delta_{vis}, \Delta_{vis}]$ удовлетворяет неравенству $\dot{\eta} \geq -\varepsilon\eta$ почти всюду на $[t_0, \tau)$, причём $\eta(t_0) > 0$. Тогда $\eta(t) > 0 \forall t \in [t_0, \tau)$ и $\eta(\tau-) > 0$.

Доказательство. Согласно [205, Гл. III, Теор. 4.1], $\eta(t) \geq \eta_-(t)$, где $\eta_-(\cdot)$ определяется уравнением $\dot{\eta}_- = -\varepsilon\eta_-$ и условием $\eta_-(t_0) = \eta(t_0) > 0$. Следовательно,

$$\eta(t) \geq \eta_-(t) = \eta(t_0)e^{-\varepsilon(t-t_0)} > 0 \quad \forall t \in [t_0, \tau)$$

и

$$\eta(\tau-) \geq \eta_-(\tau) > 0.$$

□

Фазовое пространство замкнутой системы задаётся как

$$\mathfrak{S} := (\backslash, \mathbf{V}, Z), \text{ где } \backslash := \{s_i\}_{i=0}^{N-1}, \mathbf{V} := \{v_i\}_{i=0}^{N-1}, \text{ и } Z = \{z_j\}_{j=0}^{r-1}$$

определено в соответствии с (3.12). Из (5.2), (5.4), (5.6) и (5.14) следует

$$\dot{s}_i = v_i, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad \dot{z}_j = z_{j+1}, \quad j = 0, \dots, r-2, \quad (\Gamma.6)$$

$$\dot{v}_i = \widehat{f}_i \left[t, Z, P, \mathbf{V}, u_i^{\langle -\text{sgn } \Sigma_i \rangle}, \lambda, \lambda_0 \right], \quad (\Gamma.7)$$

$$\dot{z}_{r-1} = \mathcal{Z} \left[t, Z, P, \mathbf{V}, \{u_i^{\langle -\text{sgn } \Sigma_i \rangle}\}_{i=0}^{N-1}, \lambda, \lambda_0 \right], \quad (\Gamma.8)$$

где Σ_i задаётся формулой (Г.3), P определяется через $\backslash$, как описано во втором абзаце раздела 5.1, а функция

$$\widehat{f}_i [t, Z, P, \mathbf{V}, u_i, \lambda, \lambda_0] := \tilde{f}_i [t, P, \mathbf{V}, u_i, \Xi_i(t, Z, P, \mathbf{V}, \lambda, \lambda_0)]$$

является липшицевой благодаря предположению 5.1.5. Как было отмечено сразу после (5.15), решение приведённой системы ОДУ с разрывными правыми частями рассматривается в рамках подхода выпуклизации Филиппова [91, а), разд. 4].

Лемма Г.2. *Предположим, что для допустимого начального состояния $z(\cdot)$ и неопределённостей $\lambda(\cdot) \in \mathbb{L}_\infty^{\text{loc}}$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}^{n_0}$, удовлетворяющих (5.3), решение системы (Г.6)–(Г.8) определено на конечном интервале $[0, \tau)$ и выполняется $\sup_{t \in [0, \tau)} |v_i(t)| < \varepsilon_v$.*

Тогда решение можно продолжить вправо за точку τ .

Доказательство. Согласно [91, а), разд. 4], решение определяется как решение дифференциального включения $\dot{\mathfrak{S}} \in \mathfrak{F}[t, \mathfrak{S}]$, где $\mathfrak{F}[t, \mathfrak{S}]$ представляет собой выпуклую оболочку всех предельных значений правой части системы (Г.6)–(Г.8) при стремлении состояния к $\mathfrak{S}$ в обход точек разрыва.

Поскольку $\widehat{f}_i$ и $\mathcal{Z}$ в (Г.7) и (Г.8) непрерывны, соответствующие предельные значения определяются предельными значениями $u_i^{\langle -\text{sgn } \Sigma_i \rangle}$. Они принадлежат множеству из двух элементов: $u_i^{\langle -1 \rangle}$ и $u_i^{\langle +1 \rangle}$. Используя определение $\mathcal{U}$ из (5.13), получаем, что $z(\cdot)$ удовлетворяет (5.12).

Функции $P(\cdot)$ и $\mathbf{V}(\cdot)$ продолжаются на $[0, \infty)$ как элементы $\mathbb{L}_\infty^{\text{loc}}$. Согласно пункту iv) предположения 5.1.5, z продолжаемо на $[0, \infty)$ как решение (5.12). Следовательно, $Z(t)$ ограничено при $t \rightarrow \tau-$, то есть существует $D_Z \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\|Z(t)\| \leq D_Z \quad \forall t \in [0, \tau).$$

Для таких t имеем $|s_i(t)| \leq |s_i(0)| + \tau \varepsilon_v$ по (Г.6) и $|v_i(t)| \leq \varepsilon_v - \delta$ для некоторого $\delta > 0$ по условиям леммы.

Следовательно, траектория $\mathfrak{S}(t)$ при $t \in [0, \tau)$ лежит в компактном множестве

$$t \in [0, \tau + 1], \quad |s_i| \leq |s_i(0)| + \tau \varepsilon_v + 1, \quad |v_i(t)| \leq \varepsilon_v - \delta/2, \quad \|Z\| \leq D_Z + 1,$$

и не достигает его границы при $t \rightarrow \tau-$. Так как это множество лежит в области определения $\mathfrak{F}$, решение продолжаемо вправо от τ по [91, теор. 2, разд. 7]. $\square$

Это доказательство также показывает, что любая функция v_i удовлетворяет выпуклизированному по Филиппову варианту соответствующего уравнения (5.2), рассматриваемого изолированно от остальных ОДУ.

Отныне рассматривается траектория замкнутой системы, определённая на интервале $[0, T_{\text{fin}})$, где $T_{\text{fin}} \in (0, \infty]$. Согласно [91, теор. 1, разд. 7], такая траектория существует. Все рассматриваемые множества времен предполагаются лежащими в $[0, T_{\text{fin}})$. Следующая лемма использует величину μ из (Г.5).

Лемма Г.3. Если во внутренней временного интервала T конфигурация команды бесстолкновительна и $\Sigma_i \neq 0$, $|v_i| \leq \varepsilon_v$ для некоторого робота i , то

$$\dot{v}_i \text{sgn } \Sigma_i \leq -\mu \quad \text{почти всюду на } T. \quad (\text{Г.9})$$

Доказательство. С учетом (Г.2) и (5.14) получаем

$$\dot{v}_i \text{sgn } \Sigma_i = -(-\text{sgn } \Sigma_i) \tilde{f}_i \left[t, \mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, u_i^{\langle -\text{sgn } \Sigma_i \rangle}, \boldsymbol{\xi}_i \right] \stackrel{(\text{Г.5})}{\leq} -\mu,$$

откуда следует (Г.9). □

Лемма Г.4. Пусть $\tau_* \in (0, \infty)$ и конфигурация команды бесстолкновительна для $t \in [0, \tau_*)$. Тогда $\sup_{t \in [0, \tau_*)} |v_i(t)| < \varepsilon_v$ для всех роботов i .

Доказательство. Согласно лемме Г.2, рассматриваемая траектория может быть продолжена вправо от τ_* .

Предположим, что утверждение леммы неверно для некоторого i . Тогда

$$E := \{t \geq 0 : |v_i(t)| < \varepsilon_v\} \not\supset [0, \tau_*],$$

тогда как $0 \in E$ по (Г.4).

Для левой связной компоненты $[0, \tau)$ множества E имеем:

$$0 < \tau \leq \tau_*, \quad |v_i(t)| < \varepsilon_v \quad \forall t \in [0, \tau),$$

и либо $v_i(\tau) = \varepsilon_v$, либо $v_i(\tau) = -\varepsilon_v$. Рассмотрим случай $v_i(\tau) = \varepsilon_v$; второй рассматривается аналогично.

Из (5.16) следует

$$\delta := (\varepsilon_v - k\Delta_{\text{vis}})/2 > 0.$$

Следовательно, для $t \in [0, \tau)$ при $t \approx \tau$ выполняется

$$\begin{aligned} v_i(t) &\geq \varepsilon_v - \delta, \\ \Sigma_i(t) &\stackrel{(\text{Г.3})}{=} v_i - k\delta_i^+ - k\delta_i^- \stackrel{(5.9)}{\geq} \varepsilon_v - \delta - k\Delta_{\text{vis}} = \delta > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, интервал $T := [t_0, \tau]$ при $t_0 < \tau$, $t_0 \approx \tau$ удовлетворяет условиям леммы Г.3 с $\Sigma_i > 0$. По лемме Г.3 выполняется (Г.9), и потому v_i убывает на T .

Остается заметить, что это противоречит условиям

$$v_i(t_0) < \varepsilon_v, \quad v_i(\tau) = \varepsilon_v.$$

□

Получаем следующий результат.

Следствие Г.5. Пусть конфигурация команды бесстолкновительна на интервале $[0, \tau_*)$. Тогда траектория продолжаема вправо от τ_* .

Лемма Г.6. Пусть конфигурация команды бесстолкновительна на временном интервале $T := [\tau_-, \tau_+]$. Тогда для любого i верны следующие утверждения:

i) Функции $\delta_i^\pm, \Sigma_i$ абсолютно непрерывны на T , как и

$$\Sigma_i^\pm := v_i - k\delta_i^\pm; \quad (\text{Г.10})$$

ii) Если дополнительно $\tau_- = 0$ и $\Sigma_i \neq 0$ во внутренности интервала T , то почти всюду на T

$$\dot{Q} \cdot \text{sgn } \Sigma_i \leq -\mu + 4k\bar{v} \stackrel{(5.16)}{<} 0 \quad \text{для } Q := \Sigma_i, \Sigma_i^\pm. \quad (\text{Г.11})$$

Доказательство. (i) Бесстолкновительность позволяет перенумеровать роботов так, чтобы для $t \in T$ точки $\mathbf{q}_j(t) \in S_0^1$ были индексированы против часовой стрелки.

Кроме того, нормируем углы s_j (при необходимости добавляя целые кратные 2π) так, чтобы s_j гладко зависели от времени и

$$\delta_i^+(t) = \min \{s_{i \oplus 1}(t) - s_i(t); \Delta_{\text{vis}}\} \quad \forall t \in T.$$

Согласно теореме Данскина [206], функция δ_i^+ абсолютно непрерывна и почти всюду на T выполняется:

$$\dot{\delta}_i^+ = v_{i \oplus 1} - v_i \quad \text{если } |s_{i \oplus 1} - s_i| < \Delta_{\text{vis}}, \quad \dot{\delta}_i^+ = 0 \quad \text{иначе.} \quad (\text{Г.12})$$

Аналогичные рассуждения показывают, что δ_i^- также абсолютно непрерывна, и формула (Г.12) остаётся верной, если заменить $\dot{\delta}_i^+$ на $\dot{\delta}_i^-$, а $v_{i \oplus 1}$ на $v_{i \ominus 1}$.

Из (Г.3) и (Г.10) следует, что Σ_i и $\Sigma_i^\pm$ абсолютно непрерывны на T .

(ii) Из (Г.12) (и её аналога для δ_i^-) и леммы Г.4 следует

$$|\dot{\delta}_i^\pm| < 2\varepsilon_v \quad \text{почти всюду на } T.$$

Пусть $\Sigma_i \neq 0$ во внутренности T для некоторого i . Тогда $\varsigma := \text{sgn } \Sigma_i$ сохраняет знак на этой внутренности, и почти всюду на T имеем

$$\begin{aligned} \varsigma \dot{\Sigma}_i &= \varsigma [\dot{v}_i - k\dot{\delta}_i^+ - k\dot{\delta}_i^-] \\ &\stackrel{(\text{Г.2}), (5.14)}{\leq} \varsigma \tilde{f}_i(t, \mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}, u_i^{\langle -\text{sgn } \Sigma_i \rangle}, \boldsymbol{\xi}_i) + k[|\dot{\delta}_i^+| + |\dot{\delta}_i^-|] \\ &\stackrel{(\text{Г.5}), |\dot{\delta}_i^\pm| < 2\varepsilon_v}{\leq} -\mu + 4k\bar{v}. \end{aligned} \quad (\text{Г.13})$$

Для $\Sigma_i^\pm$ неравенство (Г.11) доказывается аналогично. $\square$

Лемма Г.7. Пусть задано $\tau_* > 0$, и конфигурация команды бесстолкновительна для $t \in [0, \tau_*)$. Тогда

$$\Sigma_i^+(t) < 0, \quad \Sigma_i^-(t) > 0 \quad \forall t \in [0, \tau_*], i.$$

Доказательство. Предположим, что первое утверждение леммы неверно для некоторого робота i , то есть

$$E := \{t \in [0, \tau_*] : \Sigma_i^+(t) < 0\} \neq [0, \tau_*].$$

По (Г.4) имеем $0 \in E$. Для левой связной компоненты $[0, \tau)$ множества E выполняется:

$$0 < \tau \leq \tau_*, \quad \Sigma_i^+(t) < 0 \quad \forall t \in [0, \tau),$$

и

$$\Sigma_i^+(\tau) = 0.$$

Из (5.9) и (Г.10) следует, что

$$\Sigma_i(\tau) = \Sigma_i^+ - k\delta_i^- > \Sigma_i^+(\tau) = 0.$$

Тогда по пункту (i) леммы Г.6 получаем

$$\Sigma_i(t) > 0 \quad \forall t \in [\tau - \delta, \tau)$$

для некоторого $\delta > 0$, $\delta \approx 0$.

Применяя пункт (ii) леммы Г.6 к $\Sigma_i^+(\cdot)$ на $[\tau - \delta, \tau]$, видим, что $\Sigma_i^+(\cdot)$ убывает на этом интервале. Это несовместимо с

$$\Sigma_i^+(\tau - \delta) < 0, \quad \Sigma_i^+(\tau) = 0.$$

Полученное противоречие доказывает первое утверждение леммы.

Второе утверждение доказывается аналогично. □

Лемма Г.8. Конфигурация команды является бесстолкновительной на всей области определения траектории.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует $\tau > 0$ такое, что конфигурация бесстолкновительна для $t \in [0, \tau)$, но группа роботов занимает одно и то же положение при $t = \tau$.

Рассматривая интервал $[0, \tau)$, перенумеруем роботов так же, как в доказательстве леммы Г.6, и дополнительно назначим нулевой индекс так, чтобы одна из указанных групп была образована роботами $i = 0, \dots, s$, где $s \geq 1$, причём

$$\varrho_{0 \oplus 1}(\tau) \neq \varrho_0(\tau), \quad \varrho_s(\tau) \neq \varrho_{s \oplus 1}(\tau).$$

Для $t \in [0, \tau)$ из леммы Г.7 и (Г.10) следует, что

$$0 > \Sigma_0^+(t) = v_0(t) - k\delta_0^+(t),$$

и

$$0 < \Sigma_1^-(t) = v_1(t) - k\delta_1^-(t),$$

где

$$\delta_1^-(t) = -\delta_0^+(t).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_0^+(t) &= \dot{s}_1(t) - \dot{s}_0(t) = v_1(t) - v_0(t) \\ &> -k\delta_0^+(t) - \{k\delta_0^+(t)\} = -2k\delta_0^+(t).\end{aligned}$$

Так как $\delta_0^+(0) > 0$, лемма Г.1 гарантирует, что

$$\delta_0^+(\tau-) > 0,$$

что противоречит тому, что роботы 0 и 1 стремятся к одному и тому же положению при $t \rightarrow \tau-$. Это противоречие завершает доказательство. $\square$

Используя лемму Г.8, следствие Г.5 и повторяя рассуждения из второго абзаца доказательства леммы Г.2, получаем следующий результат.

Следствие Г.9. *Траектория продолжаема на $[0, \infty)$, и утверждение **iii)** теоремы 5.2.1 верно.*

Используя лемму Г.4, следствие Г.9 и (Г.3), получаем следующий результат.

Следствие Г.10. *Утверждение **ii)** теоремы 5.2.1 верно.*

Применяя (Г.11) к $Q := \Sigma_i$, также устанавливаем следующий факт.

Следствие Г.11. *Для любого i существует момент времени $t_{sl}^{(i)} \geq 0$ такой, что функция Σ_i ненулевая, имеет постоянный знак и монотонно стремится к 0 при $t < t_{sl}^{(i)}$, тогда как при $t > t_{sl}^{(i)}$ происходит скользящее движение по поверхности $\Sigma_i = 0$.*

Таким образом, начиная с некоторого момента времени t_* , все роботы находятся в описанном выше режиме скользящего движения, и поэтому

$$\dot{s}_i = k\delta_i^+ + k\delta_i^-.$$

Далее внимание сосредоточивается на $t \geq t_*$, а роботы перенумеровываются так же, как в доказательстве леммы Г.6. Тогда

$$\delta_i^- = -\delta_{i\ominus 1}^+$$

и

$$\dot{s}_i = k\delta_i^+ - k\delta_{i\ominus 1}^+. \quad (\text{Г.14})$$

Лемма Г.12. *Для $\delta(t) := \min_i \delta_i^+(t)$, любого $t_0 > t_*$ и любого*

$$\Delta \in (0, \min \{\delta(t_0); p/N\})$$

имеем

$$\delta(t) > \Delta \quad \forall t \geq t_0.$$

Доказательство. Предположим противное:

$$E := \{t \geq t_0 : \delta(t) > \Delta\} \neq [t_0, \infty).$$

Так как $t_0 \in E$, левая связная компонента множества E имеет вид $[t_0, \tau)$. Здесь

$$\tau > t_0, \quad \delta(\tau) = \Delta,$$

и

$$\delta(t) > \Delta \quad \text{для} \quad t \in [t_0, \tau).$$

Поскольку $\Delta < p/N < \Delta_{\text{vis}}$ по (3.3) и

$$\sum_{j=0}^{N-1} \delta_j^+(t) = p,$$

существует i такое, что

$$\delta_i^+(\tau) = \Delta, \quad \delta_{i \oplus 1}^+(\tau) > \Delta.$$

Тогда при $t \approx \tau$ имеем

$$\delta_i^+(t) < \delta_{i \oplus 1}^+(t)$$

и

$$\delta_i^+(t) = s_{i \oplus 1}(t) - s_i(t) < \Delta_{\text{vis}}.$$

Поэтому из (Г.12) следует

$$\dot{\delta}_i^+ = \dot{s}_{i \oplus 1}(t) - \dot{s}_i(t) \stackrel{(\Gamma.14)}{=} A(t) + B(t),$$

где

$$A(t) := k[\delta_{i \oplus 1}^+(t) - \delta_i^+(t)], \quad B(t) := k[\delta_{i \ominus 1}^+(t) - \delta_i^+(t)].$$

Здесь

$$A(\tau-) = k[\delta_{i \oplus 1}^+(\tau) - \delta_i^+(\tau)] > 0$$

и

$$\lim_{t \rightarrow \tau-} B(t) = k \lim_{t \rightarrow \tau-} [\delta_{i \ominus 1}^+(t) - \delta_i^+(t)] \geq k \lim_{t \rightarrow \tau-} [\delta(t) - \delta_i^+(t)] = k[\delta(\tau) - \delta_i^+(\tau)] = 0.$$

Следовательно, при $t < \tau$, $t \approx \tau$, имеем

$$\dot{\delta}_i^+(t) > 0.$$

Значит,

$$\delta_i^+(t) < \delta_i^+(\tau) = \Delta.$$

Однако по определениям $\delta(\cdot)$ и τ для таких t выполняется

$$\delta_i^+(t) \geq \delta(t) > \Delta.$$

Полученное противоречие завершает доказательство. □

Предельная конфигурация $\mathcal{R} = [\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_{N-1}]$ определяется как любая ω -предельная точка функции

$$t \mapsto R(t) := [\mathbf{q}_0(t), \dots, \mathbf{q}_{N-1}(t)],$$

то есть как предел

$$\lim_{j \rightarrow \infty} R(t_j),$$

связанный с некоторой последовательностью

$$t_1 < t_2 < \dots < t_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty.$$

Согласно [205, теор. 1.1, гл. VII], множество $\mathfrak{R}$ всех предельных конфигураций непусто и компактно. Обозначим через $d_i(\mathcal{R})$ угловое расстояние против часовой стрелки от $\mathbf{q}_i$ до $\mathbf{q}_{i \oplus 1}$ и положим

$$d(\mathcal{R}) := \min_i d_i(\mathcal{R});$$

по лемме Г.12 имеем $d(\mathcal{R}) > 0$. И $d_i(\mathcal{R})$, и $d(\mathcal{R})$ непрерывно зависят от $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$.

Лемма Г.13. Для любого робота i выполняется следующее соотношение:

$$\delta_i^+(t) = s_{i \oplus 1}(t) - s_i(t) \rightarrow p/N \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty. \quad (\text{Г.15})$$

Доказательство. Непрерывная функция $d(\cdot)$ достигает своего минимума $d_{\min}$ на $\mathfrak{R}$ в некоторой предельной конфигурации $\mathcal{R}$. Сначала покажем, что

$$d_{\min} \geq p/N.$$

Предположим противное. Тогда

$$d_i(\mathcal{R}) = d_{\min} < p/N < \Delta_{\text{vis}}$$

для некоторого i . Первое неравенство означает, что равенство $d_i(\mathcal{R}) = d_{\min}$ не может выполняться для всех i , поскольку

$$\sum_i d_i(\mathcal{R}) = p.$$

Следовательно, существует i такое, что

$$d_i(\mathcal{R}) = d_{\min}, \quad d_{i \oplus 1}(\mathcal{R}) > d_{\min},$$

где $d_{\min} > 0$ по лемме Г.12.

Пусть $\{t_m\}_{m=1}^\infty$ — последовательность моментов времени, порождающая $\mathcal{R}$. Тогда при достаточно больших m

$$\begin{aligned} \delta_i^+(t_m) &\in \left(d_{\min} - \frac{\varepsilon}{6}, d_{\min} + \frac{\varepsilon}{6} \right), \\ \delta_{i \oplus 1}^+(t_m) &> d_{\min} + \varepsilon, \quad \delta_{i \ominus 1}^+(t_m) > d_{\min} - \frac{\varepsilon}{6}, \end{aligned}$$

где

$$\varepsilon := \min\{d_{i\oplus 1}(\mathcal{R}); \Delta_{\text{vis}}\} - d_{\min} > 0.$$

Для $t > t_*$ из леммы Г.4, следствия Г.9 и (Г.12) следует, что

$$|\dot{\delta}_j^+| \leq 2\varepsilon_v \quad \forall j.$$

Следовательно,

$$|\delta_j^+(\tau_2) - \delta_j^+(\tau_1)| \leq 2\varepsilon_v |\tau_2 - \tau_1| \quad \forall \tau_1, \tau_2 > t_*.$$

Для

$$\Delta t := \frac{\varepsilon}{32\varepsilon_v}, \quad t_m^- := t_m - \Delta t,$$

и достаточно больших m имеем

$$\begin{aligned} t \in [t_m^-, t_m] &\Rightarrow \dot{\delta}_i^+(t) \stackrel{(\text{Г.12})}{=} v_{i\oplus 1}(t) - v_i(t) \\ &\stackrel{(\text{Г.14})}{=} k\delta_{i\oplus 1}^+(t) - 2k\delta_i^+(t) + k\delta_{i\ominus 1}^+(t) \\ &\geq k\delta_{i\oplus 1}^+(t_m) - 2k\delta_i^+(t_m) + k\delta_{i\ominus 1}^+(t_m) - 8k\varepsilon_v \Delta t \\ &\geq k(d_{\min} + \varepsilon) - 2k(d_{\min} + \varepsilon/6) + k(d_{\min} - \varepsilon/6) - 8k\varepsilon_v \Delta t \\ &= k\varepsilon/2 - 8k\varepsilon_v \Delta t = k\varepsilon/4 \\ &\Rightarrow \delta_i^+(t_m^-) \leq \delta_i^+(t_m) - \Delta t k \varepsilon/4. \end{aligned}$$

Выбирая сходящуюся подпоследовательность из $\{R(t_m^-)\}_m$ и переходя к её пределу, получаем предельную конфигурацию $\mathcal{R}^-$ такую, что

$$d(\mathcal{R}^-) < d_{\min},$$

что противоречит определению $d_{\min}$. Это противоречие доказывает, что

$$d_{\min} \geq p/N.$$

Следовательно,

$$d_i(\mathcal{R}) \geq p/N \quad \forall \mathcal{R} \in \mathfrak{R}, i.$$

Поскольку

$$\sum_{i=0}^{N-1} d_i(\mathcal{R}) = p,$$

получаем

$$d_i(\mathcal{R}) = p/N \quad \text{для всех } i \text{ и } \mathcal{R} \in \mathfrak{R}. \quad (\text{Г.16})$$

Теперь предположим, что (Г.15) не выполняется для некоторого i . Тогда существует последовательность $\{t_m\}$ такая, что

$$s_{i\oplus 1}(t_m) - s_i(t_m) \rightarrow \Delta s \neq p/N, \quad t_m \rightarrow \infty \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Выбирая сходящуюся подпоследовательность из $\{R(t_m)\}_m$ и переходя к её пределу, получаем предельную конфигурацию, для которой (Г.16) неверно. Это противоречие завершает доказательство. $\square$

Лемма Г.14. *Сходимость (Г.15) является экспоненциально быстрой.*

Доказательство. По следствию Г.11, (3.3) и (Г.15) существует $t_* \geq 0$ такое, что (Г.14) и ситуация из первой строки в (Г.12) выполняются для всех $t \geq t_*$. Тогда

$$\dot{\delta}_i^+ = k [\delta_{i\oplus 1}^+ - 2\delta_i^+ + \delta_{i\ominus 1}^+], \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (\text{Г.17})$$

при $t \geq t_*$.

Пусть A и I обозначают соответственно $N \times N$ -матрицу правых частей в (Г.17) и единичную матрицу. Матрица $A + 3kI$ имеет неотрицательные элементы и является неразложимой по [211, теор. 6.2.24]. Поэтому [211, теор. 8.4.4] гарантирует, что спектральный радиус ρ этой матрицы является простым собственным значением, которому соответствует положительный собственный вектор

$$\xi = \{\xi_i > 0\}_{i=0}^{N-1}.$$

Суммируя уравнения

$$k[\xi_{i\oplus 1} + \xi_i + \xi_{i\ominus 1}] = \rho \xi_i$$

по всем i , получаем

$$3k \sum_i \xi_i = \rho \sum_i \xi_i,$$

и, следовательно,

$$\rho = 3k.$$

Спектр матрицы A получается из спектра $A + 3kI$ сдвигом на $3k$ влево вдоль действительной оси. Следовательно, 0 является простым собственным значением A , а спектр A лежит в замкнутой левой полуплоскости комплексной плоскости.

Отсюда решение $\{\delta_i^+(t)\}_{i=0}^{N-1}$ системы (Г.17) стремится либо к нулю, либо к собственному вектору A , соответствующему 0, причём эта сходимость имеет экспоненциальную скорость. Следовательно, сходимость (Г.15) является экспоненциально быстрой. $\square$

Объединяя лемму Г.14 с (Г.14), получаем следующий результат.

Следствие Г.15. *Последняя сходимость в (5.1) является экспоненциально быстрой.*

Доказательство теоремы 5.2.1. Используем момент времени t_* и перенумерацию роботов, описанные после следствия Г.11, и рассматриваем $t \geq t_*$.

Утверждения **ii)** и **iii)** теоремы 5.2.1 обоснованы соответственно следствием Г.10 и леммой Г.8 (см. также следствие Г.9). Утверждение **v)** следует из леммы Г.4, леммы Г.7 и пункта **iii)**.

По следствию Г.15 существуют $\varepsilon > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что

$$\dot{s}_i(t) = v^0(t) + \Delta_i^v(t),$$

где

$$|\Delta_i^v(t)| \leq \gamma e^{-\varepsilon t} \quad \forall t \geq 0.$$

Возвращаясь к исходной системе отсчёта и обозначая

$$s(t) := \int_0^t v^0(\tau) d\tau,$$

получаем

$$s_i(t) - s(t) = \underbrace{s_i(0) + \int_0^\infty \Delta_i^v(\tau) d\tau}_{=: s_i^{\lim}} - \int_t^\infty \Delta_i^v(\tau) d\tau; \quad (\text{Г.18})$$

$$\left| \int_t^\infty \Delta_i^v(\tau) d\tau \right| \leq \gamma \int_t^\infty e^{-\varepsilon\tau} d\tau = \frac{\gamma}{\varepsilon} e^{-\varepsilon t}. \quad (\text{Г.19})$$

При этом

$$s_{i\oplus 1}^{\lim} = s_i^{\lim} + \frac{p}{N}$$

по (Г.15). Поэтому, обозначая

$$s_* := s_0^{\lim},$$

получаем первую сходимост в (5.1) и видим, что она также является экспоненциально быстрой. Следовательно, пункт **iv)** выполнен. Это вместе с определением 5.1.1 завершает доказательство. $\square$

Г.2. Доказательство леммы 5.3.5

i) Пусть (η, φ, z) — зависящие от времени цилиндрические координаты, построенные на цилиндре, ось которого проходит через $\mathbf{p}(t)$ вверх. Используем обозначения из списка, приведённого после (5.25).

По предположению 5.3.3, точки $\boldsymbol{\rho} \in \Gamma$ можно параметризовать переменной φ :

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(\varphi) + \mathbf{p}(t) = \eta(\varphi)\vec{e}(\varphi) + \mathbf{p}(t).$$

Тогда

$$L_{\text{road}} = \left| \int_{\varphi(s_*, t)}^{\varphi(s_+, t)} \sqrt{\left\| \frac{d\boldsymbol{\rho}}{d\varphi} \right\|^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi} \right)^2} d\varphi \right|.$$

Обозначим через σ криволинейную абсциссу на Γ , а через ψ — полярный угол вектора $\rho - p(t)$ в репере Френе кривой Γ . Тогда выполняются следующие равенства:

$$\frac{d\vec{e}(\varphi)}{d\varphi} = \vec{e}(\varphi + \pi/2), \quad \frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{d\eta}{d\varphi} \vec{e}(\varphi) + \eta \vec{e}(\varphi + \pi/2), \quad (\Gamma.1)$$

$$\Rightarrow \frac{d\eta}{d\varphi} = \frac{d\sigma}{d\varphi} \left\langle \frac{d\rho}{d\sigma}; \vec{e}(\varphi) \right\rangle = \frac{d\sigma}{d\varphi} \cos \psi; \quad (\Gamma.2)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi} \right)^2 = \left\| \frac{d\rho}{d\varphi} \right\|^2 \stackrel{(\Gamma.1)}{=} \eta^2 + \left(\frac{d\eta}{d\varphi} \right)^2 \stackrel{(\Gamma.2)}{=} \eta^2 + \left(\frac{d\sigma}{d\varphi} \right)^2 \cos^2 \psi$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\varphi} \right)^2 = \left\| \frac{d\rho}{d\varphi} \right\|^2 = \frac{\eta^2}{\sin^2 \psi} \leq \frac{d_{\max}^2}{\sin^2 \psi_{\min}};$$

$$\left| \frac{dz}{d\varphi} \right| = \left| \frac{dz}{d\sigma} \frac{d\sigma}{d\varphi} \right| = |\sin \gamma| \left| \frac{d\sigma}{d\varphi} \right| \leq \sin \gamma_{\max} \left| \frac{d\sigma}{d\varphi} \right|.$$

Доказательство завершается объединением полученных оценок:

$$\begin{aligned} L_{\text{road}} &\leq \left| \int_{\varphi(s_*,t)}^{\varphi(s_+,t)} \left| \frac{d\sigma}{d\varphi} \right| \sqrt{1 + \sin^2 \gamma_{\max}} d\varphi \right| \\ &\leq \frac{d_{\max}}{\sin \psi_{\min}} \sqrt{1 + \sin^2 \gamma_{\max}} |\varphi(s_*,t) - \varphi(s_+,t)|. \end{aligned}$$

ii) Рассмотрим естественное параметрическое представление $\rho(\sigma)$ кривой Γ и напомним, что $r = r(s)$ — естественное параметрическое представление дороги. Пусть символ $'$ обозначает дифференцирование по длине пути s , а $\vec{n}$ — единичный вертикальный вектор, направленный вверх.

Тогда

$$r = \rho(\sigma) + z(\sigma)\vec{n}$$

является параметрическим представлением дороги через параметр σ , где

$$z(\sigma)$$

— знаковая высота точки дороги, проекция которой равна $\rho(\sigma)$.

Пусть σ_i — параметр, соответствующий r_i . Тогда

$$r(s_i) = \rho + \eta_i \vec{e}[\varphi_i] + z(\sigma_i) \vec{n}$$

$$\Rightarrow r'(s_i) \dot{s}_i = \dot{\rho} + \dot{\eta}_i \vec{e}[\varphi_i] + \eta_i \vec{e}[\varphi_i + \pi/2] \dot{\varphi}_i + \frac{dz}{d\sigma} \dot{\sigma}_i \vec{n},$$

$$\eta_i \dot{\varphi}_i = \langle r'(s_i); \vec{e}[\varphi_i + \pi/2] \rangle \dot{s}_i - \langle \dot{\rho}; \vec{e}[\varphi_i + \pi/2] \rangle$$

$$= \dot{s}_i \sin \psi_i \cos \gamma - \langle \dot{\rho}; \vec{e}[\varphi_i + \pi/2] \rangle \Rightarrow (5.27), \quad (\Gamma.3)$$

$$\dot{\eta}_i = \langle r'(s_i); \vec{e}[\varphi_i] \rangle \dot{s}_i - \langle \dot{\rho}; \vec{e}[\varphi_i] \rangle = \cos \psi_i \cos \gamma \dot{s}_i - \langle \dot{\rho}; \vec{e}[\varphi_i] \rangle. \quad (\Gamma.4)$$

Дифференцируя (Г.3), получаем

$$\begin{aligned} \eta_i \ddot{\varphi}_i &= \ddot{s}_i \sin \psi_i \cos \gamma - \langle \ddot{\rho}; \vec{e}[\varphi_i + \pi/2] \rangle + \langle \dot{\rho}; \vec{e}[\varphi_i] \rangle \dot{\varphi}_i \\ &\quad + \dot{s}_i \left[\dot{\psi}_i \cos \psi_i \cos \gamma - \frac{d\gamma}{ds} \dot{s}_i \sin \psi_i \sin \gamma \right] - \dot{\eta}_i \dot{\varphi}_i. \end{aligned} \quad (\Gamma.5)$$

Здесь

$$\frac{d\gamma}{ds}$$

— вертикальная кривизна λ дороги.

Пусть $\theta(\sigma)$ — полярный угол единичного касательного вектора $\vec{\tau}(\sigma)$ относительно $\vec{d}$. Тогда кривизна $\varkappa$ кривой Γ равна

$$\frac{d\theta}{d\sigma}$$

по стандартному определению.

Обозначая

$$\theta_i := \theta(\sigma_i),$$

получаем

$$\varphi_i + \psi_i = \theta_i,$$

и потому

$$\dot{\psi}_i = \dot{\theta}_i - \dot{\varphi}_i = \frac{d\theta}{d\sigma} \dot{\sigma}_i - \dot{\varphi}_i.$$

Между тем,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s_i) &= \boldsymbol{\varrho}(\sigma_i) + z(\sigma_i)\vec{n} \\ \Rightarrow \mathbf{r}'(s_i)\dot{s}_i &= \frac{d\boldsymbol{\varrho}}{d\sigma}\dot{\sigma}_i + \frac{dz}{d\sigma}\dot{\sigma}_i\vec{n}. \end{aligned}$$

Следовательно, горизонтальный вектор

$$\frac{d\boldsymbol{\varrho}}{d\sigma}\dot{\sigma}_i$$

является проекцией вектора

$$\mathbf{r}'(s_i)\dot{s}_i.$$

Так как

$$\frac{d\boldsymbol{\varrho}}{d\sigma} \quad \text{и} \quad \mathbf{r}'(s_i)$$

— единичные векторы, а касательная к дороге образует угол γ с плоскостью H , заключаем, что

$$\dot{\sigma}_i = \dot{s}_i \cos \gamma,$$

и, следовательно,

$$\dot{\psi}_i = \dot{s}_i \varkappa \cos \gamma - \dot{\varphi}_i.$$

Из (Г.3) и (Г.4) следует, что выражение во второй строке (Г.5) равно

$$\begin{aligned} & -\lambda \dot{s}_i^2 \sin \psi_i \sin \gamma - \dot{s}_i^2 \cos^2 \gamma \cos \psi_i \left[2 \frac{\sin \psi_i}{\eta_i} - \varkappa \right] \\ & + \eta_i^{-1} \dot{s}_i \langle \dot{\mathbf{p}}; \vec{e}[\varphi_i] \rangle \sin \psi_i \cos \gamma - \eta_i^{-1} \langle \dot{\mathbf{p}}; \vec{e}[\varphi_i] \rangle \langle \dot{\mathbf{p}}; \vec{e}[\varphi_i + \pi/2] \rangle \\ & + 2\eta_i^{-1} \dot{s}_i \cos \psi_i \cos \gamma \langle \dot{\mathbf{p}}; \vec{e}[\varphi_i + \pi/2] \rangle. \end{aligned}$$

Используя (Г.3) и (Г.5), получаем

$$\begin{aligned}
 & \eta_i \ddot{\varphi}_i - \ddot{s}_i \sin \psi_i \cos \gamma = \\
 & -\lambda \dot{s}_i^2 \sin \psi_i \sin \gamma - \dot{s}_i^2 \cos^2 \gamma \cos \psi_i \left[2 \frac{\sin \psi_i}{\eta_i} - \varkappa \right] \\
 & + 2\eta_i^{-1} \dot{s}_i \langle \dot{\boldsymbol{p}}; \bar{e}[\varphi_i] \rangle \sin \psi_i \cos \gamma - 2\eta_i^{-1} \langle \dot{\boldsymbol{p}}; \bar{e}[\varphi_i] \rangle \langle \dot{\boldsymbol{p}}; \bar{e}[\varphi_i + \pi/2] \rangle \\
 & + 2\eta_i^{-1} \dot{s}_i \cos \psi_i \cos \gamma \langle \dot{\boldsymbol{p}}; \bar{e}[\varphi_i + \pi/2] \rangle - \langle \dot{\boldsymbol{p}}; \bar{e}[\varphi_i + \pi/2] \rangle \\
 & \Rightarrow (5.28), (5.29).
 \end{aligned}$$